支払備金に関する Mack の公式の一般化

斎藤新悟

九州大学大学院数理学研究院

2009/10/24

はじめに

当研究成果は，筆者が

- 日新火災海上保険株式会社
- 九州大学大学院数理学研究院

による共同研究に携わる中で得たものである．

本発表の概略：

- 目的：ランオフ三角形から支払備金 (IBNR) を区間推定．
- 先行研究：Mack の公式．
- 主結果：Mack の公式の拡張．

ランオフ三角形と支払備金

$C_{i,j}$ = 事故年度 i，経過年数 j における累積支払保険金 $(i, j = 1, \ldots, n)$.
$i + j \leqq n + 1$ に対する $C_{i,j}$ が既知.

		経過年数 j				
		1	2	$\cdots$	$n-1$	n
事故年度 i	1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$\cdots$	$C_{1,n-1}$	$C_{1,n}$
	2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	$\cdots$	$C_{2,n-1}$	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$		
	$n-1$	$C_{n-1,1}$	$C_{n-1,2}$			
	n	$C_{n,1}$				

支払備金 $R = (C_{2,n} - C_{2,n-1}) + \cdots + (C_{n-1,n} - C_{n-1,2}) + (C_{n,n} - C_{n,1})$.

チェーンラダー法

チェーンラダー法は支払備金の点推定を与える．

		経過年数 j				
		1	2	$\cdots$	$n-1$	n
事故年度 i	1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$\cdots$	$C_{1,n-1}$	$C_{1,n}$
	2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	$\cdots$	$C_{2,n-1}$	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$		
	$n-1$	$C_{n-1,1}$	$C_{n-1,2}$			
	n	$C_{n,1}$				

Loss Development Factor : $\widehat{f}_j = \dfrac{C_{1,j+1} + \cdots + C_{n-j,j+1}}{C_{1,j} + \cdots + C_{n-j,j}}$.

$$\widehat{C}_{i,j} = C_{i,n+1-i}\widehat{f}_{n+1-i} \cdots \widehat{f}_{j-1} \qquad (i + j \geqq n + 2).$$

Mack モデル

問題

支払備金を区間推定するにはどうすればよいか？

Mack のアイデア：

- チェーンラダー法を正当化する distribution-free なモデルを設定.
- 平均 2 乗誤差を推定.

Mack モデル

(1) $(C_{1,1},\ldots,C_{1,n}),\ldots,(C_{n,1},\ldots,C_{n,n})$ は独立
（事故年度に関する独立性）.

(2) $E[C_{i,j+1}|C_{i,1},\ldots,C_{i,j}] = C_{i,j}f_j$.

(3) $V(C_{i,j+1}|C_{i,1},\ldots,C_{i,j}) = C_{i,j}v_j$.

Mackの結果 I：点推定について

$\mathcal{D} = \{C_{i,j} \mid i + j \leqq n + 1\}$：既知の情報量.
推定すべきもの：$E[C_{i,j}|\mathcal{D}]$ など.

Mackの結果 I：点推定について（チェーンラダー法の正当化）

- チェーンラダー推定量 $\widehat{f}_j$ は f_j の不偏推定量かつ
ある意味で最良推定量（つまり分散を最小にする）.
- $E[\widehat{C}_{i,j}] = E\big[E[C_{i,j}|\mathcal{D}]\big]\ \big(= E[C_{i,j}]\big) \longleftarrow$ 不偏性の類似.
- 次の $\widehat{v}_j$ は v_j の不偏推定量：

$$\widehat{v}_j = \frac{1}{n-j-1}\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \widehat{f}_j\right)^2.$$

Mackの結果II：区間推定について

支払備金 $R = (C_{2,n} - C_{2,n-1}) + \cdots + (C_{n,n} - C_{n,1})$.
その推定量 $\widehat{R} = (\widehat{C}_{2,n} - C_{2,n-1}) + \cdots + (\widehat{C}_{n,n} - C_{n,1})$.

平均2乗誤差 $\mathrm{mse}\,\widehat{R} = E\big[(R - \widehat{R})^2 \big| \mathcal{D}\big]$ を考える（分散のようなもの）.
これを用いると例えば95%信頼区間は次で推定できる：

$$\big(\widehat{R} - 3(\mathrm{mse}\,\widehat{R})^{1/2}, \widehat{R} + 3(\mathrm{mse}\,\widehat{R})^{1/2}\big).$$

Mackの結果II：区間推定について（Mackの公式）

$\mathrm{mse}\,\widehat{R}$ を次で推定する：

$$\sum_{i=2}^{n}\left(\widehat{C}_{i,n}^2 \sum_{l=n+1-i}^{n-1} \frac{\widehat{v}_l}{\widehat{f}_l^2}\left(\frac{1}{\widehat{C}_{i,l}} + \frac{1}{\sum_{m=1}^{n-l} C_{m,l}}\right)\right)$$
$$+ 2\sum_{i=2}^{n-1} \widehat{C}_{i,n}\left(\sum_{i'=i+1}^{n} \widehat{C}_{i',n}\right)\left(\sum_{l=n+1-i}^{n-1} \frac{\widehat{v}_l}{\widehat{f}_l^2 \sum_{m=1}^{n-l} C_{m,l}}\right).$$

主結果 I：Mack モデルの拡張

Mack モデル

(1) $(C_{1,1}, \ldots, C_{1,n}), \ldots, (C_{n,1}, \ldots, C_{n,n})$ は独立.

(2) $E[C_{i,j+1} | C_{i,1}, \ldots, C_{i,j}] = C_{i,j} f_j$.

(3) $V(C_{i,j+1} | C_{i,1}, \ldots, C_{i,j}) = C_{i,j} v_j$.

(3) は分散が $C_{i,j}$ の 1 乗に比例するという仮定.
これはチェーンラダーの正当化に不可欠だが本当に妥当な仮定か？

Mack モデルの拡張

(1) Mack モデルと同じ.

(2) Mack モデルと同じ.

(3′) $V(C_{i,j+1} | C_{i,1}, \ldots, C_{i,j}) = C_{i,j}^{\alpha} v_j$ （α は任意の定数）.

$\alpha = 1$ の場合が Mack モデル.

主結果 II：点推定について

- 次の $\widehat{f}_j$ は f_j の不偏推定量かつ最良推定量：

$$\widehat{f}_j = \frac{C_{1,j}^{1-\alpha}C_{1,j+1} + \cdots + C_{n-j,j}^{1-\alpha}C_{n-j,j+1}}{C_{1,j}^{2-\alpha} + \cdots + C_{n-j,j}^{2-\alpha}}.$$

- 次の $\widehat{C}_{i,j}$ は $E[\widehat{C}_{i,j}] = E\big[E[C_{i,j}|\mathcal{D}]\big]$ $\big(= E[C_{i,j}]\big)$ を満たす：

$$\widehat{C}_{i,j} = C_{i,n+1-i}\widehat{f}_{n+1-i}\cdots\widehat{f}_{j-1} \qquad (i + j \geqq n + 2).$$

- 次の $\widehat{v}_j$ は v_j の不偏推定量：

$$\widehat{v}_j = \frac{1}{n-j-1}\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}^{2-\alpha}\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \widehat{f}_j\right)^2.$$

主結果 III：区間推定について（Mack の公式の拡張）

$n+1-i \leqq j_i \leqq k_i \leqq n \ (i=1,\ldots,n)$ とし，

$$S = \sum_{i=1}^{n} (C_{i,k_i} - C_{i,j_i})$$

と定義する．

- 支払備金 $R = \sum_{i=2}^{n} (C_{i,n} - C_{i,n+1-i})$ は
  $j_i = n+1-i$, $k_i = n$ の場合の S.
- 次年度支払保険金 $\sum_{i=2}^{n} (C_{i,n+2-i} - C_{i,n+1-i})$ は
  $j_i = n+1-i$, $k_i = n+2-i$ の場合の S.

主結果 III：区間推定について（Mack の公式の拡張）

mse $\widehat{S}$ を次で推定する：

$$\sum_{i,l=1}^{n} \widehat{\varphi}_{i,l}^2 \widehat{A}_{i,l} + 2 \sum_{1 \leqq i < i' \leqq n} \sum_{l=1}^{n} \widehat{\varphi}_{i,l} \widehat{\varphi}_{i',l} \widehat{B}_l.$$

ただし，

$$\widehat{A}_{i,l} = \frac{\widehat{v}_l}{\widehat{f}_l^2} \left(\frac{1}{\widehat{C}_{i,l}^{2-\alpha}} + \frac{1}{\sum_{m=1}^{n-l} C_{m,l}^{2-\alpha}} \right), \qquad \widehat{B}_l = \frac{\widehat{v}_l}{\widehat{f}_l^2 \sum_{m=1}^{n-l} C_{m,l}^{2-\alpha}},$$

$$\widehat{\varphi}_{i,l} = \begin{cases} \widehat{C}_{i,k_i} - \widehat{C}_{i,j_i} & (n+1-i \leqq l < j_i), \\ \widehat{C}_{i,k_i} & (j_i \leqq l < k_i), \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

まとめ

- Mack モデルの仮定のうち，必ずしも自然な仮定とはいい難いものを拡張した．
- 次年度支払保険金などを含む様々な量に対して平均 2 乗誤差の推定量を与えた．