支払備金に関するMackの公式の一般化

斎藤新悟
九州大学大学院数理学研究院

1 はじめに

当研究成果は，筆者が日新火災海上保険株式会社と九州大学大学院数理学研究院との共同研究に携わる中で得たものであり，[3] で論文としてまとめられている．

事故年度 i，経過年数 j における累積支払保険金を $C_{i,j}$ $(i,j=1,\dots,n)$ とする．$i+j \leqq n+1$ に対する $C_{i,j}$ が既知である状況で，$i+j \geqq n+2$ に対する $C_{i,j}$ の推定量 $\widehat{C}_{i,j}$ を得る方法としては，チェーンラダー法がよく知られている．この推定量を用いると，例えば支払備金 $R=\sum_{i=2}^{n}(C_{i,n}-C_{i,n+1-i})$ を $\widehat{R}=\sum_{i=2}^{n}(\widehat{C}_{i,n}-C_{i,n+1-i})$ で推定することができる．

支払備金 R を区間推定するために，Mack は [1, 2] で $\widehat{R}$ の平均 2 乗誤差 $\mathrm{mse}\,\widehat{R}$ を推定する公式を与えた．本論文の主結果はこの Mack の公式を次の 2 つの点で拡張する公式を与えることである．1 つめは，本論文で考えるモデルは，Mack モデルを一般化したものになっているという点である．2 つめは，本論文で与える公式は，$\widehat{R}$ を含むはるかに広い推定量のクラスに対してその平均 2 乗誤差を求めることができるという点である．

以下では第 2 節で Mack の公式を復習した後，第 3 節で主公式を述べる．証明はすべて省略したので，興味がある読者は，Mack の公式については原論文 [1, 2] または [4] を，その拡張である当研究成果においては [3] を参照されたい．

2 Mackの公式

2.1 Mackモデル

Mack モデルでは，$C_{i,j}$ $(i,j=1,\dots,n)$ を確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上定義された正の実数値を取る 2 乗可積分な確率変数と考え，これらに関して 3 つの仮定をおく．記述を簡単にするため，$i,j=1,\dots,n$ に対して $\{C_{i,1},\dots,C_{i,j}\}$ が生成する σ 加法族を $\mathcal{G}_{i,j}$ と書く．

最初の仮定は事故年度に関する独立性である：

仮定 2.1 $\mathcal{G}_{1,n}, \dots, \mathcal{G}_{n,n}$ は独立である．

次の仮定はチェーンラダー法における基本的な仮定である：

仮定 2.2 各 $j=1,\dots,n-1$ に対して正の定数 f_j が存在し，任意の $i=1,\dots,n$ に対して次が成立する：

$$E[C_{i,j+1}|\mathcal{G}_{i,j}] = C_{i,j}f_j.$$

最後の仮定は $C_{i,j}$ の分散に関するものであり，後で述べるように Mack モデルがチェーンラダー法を正当化する理由といえる：

仮定 2.3 各 $j=1,\ldots,n-1$ に対して正の定数 v_j が存在し，任意の $i=1,\ldots,n$ に対して次が成立する：

$$V(C_{i,j+1}|\mathcal{G}_{i,j}) = C_{i,j}v_j.$$

以下でしばしば用いる σ 加法族を定義しておく．$\{C_{i,j} \mid i+j \leqq n+1\}$ が生成する σ 加法族を $\mathcal{D}$ とする．これは現時点での情報量を表す．また, $j=1,\ldots,n$ に対して $\{C_{i,k} \mid i+k \leqq n+1,\ 1 \leqq k \leqq j\}$ が生成する σ 加法族を $\mathcal{B}_j$ とする．

2.2 Mack モデルにおける点推定

2.2.1 $\boldsymbol{f_j}$ の推定

f_j はチェーンラダー法によって推定する：

推定 2.4 $j=1,\ldots,n-1$ に対して f_j を次で推定する：

$$\widehat{f_j} = \frac{C_{1,j+1}+\cdots+C_{n-j,j+1}}{C_{1,j}+\cdots+C_{n-j,j}}.$$

この推定量を用いることは次の命題で正当化される：

命題 2.5 $j=1,\ldots,n-1$ を固定し，和が 1 であるような $\mathcal{B}_j$ 可測な非負確率変数 $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_{n-j}$ を用いて

$$\lambda_1\frac{C_{1,j+1}}{C_{1,j}}+\cdots+\lambda_{n-j}\frac{C_{n-j,j+1}}{C_{n-j,j}}$$

と書ける量を考えると，次が成立する：

(1) $\widehat{f_j}$ はこのように書ける．

(2) このように書ける量はすべて f_j の不偏推定量である．特に $\widehat{f_j}$ は f_j の不偏推定量である．

(3) 上のように書ける量のうち，$\widehat{f_j}$ は $V(\cdot|\mathcal{B}_j)$ および $V(\cdot)$ を最小にする．この意味で $\widehat{f_j}$ は最良推定量である．

注意 2.6 この命題の証明では，仮定 2.3 が本質的に用いられている．

2.2.2 v_j の推定

推定 2.7 $j = 1, \ldots, n-2$ に対して v_j を

$$\widehat{v}_j = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \widehat{f}_j \right)^2$$

で推定し，v_{n-1} を

$$\widehat{v}_{n-1} = \min \left\{ \frac{\widehat{v}_{n-2}^2}{\widehat{v}_{n-3}}, \widehat{v}_{n-2}, \widehat{v}_{n-3} \right\}.$$

で推定する．

注意 2.8 上の $\widehat{v}_{n-1}$ の定義は $n \geqq 4$ の場合しか意味をなさない．n が小さい場合はランオフ三角形以外の情報も用いるのが適切であろう．

この推定量を用いることは次の命題で正当化される：

命題 2.9 $j = 1, \ldots, n-2$ に対して $E[\widehat{v}_j | \mathcal{B}_j] = v_j$ が成立する．したがって $E[\widehat{v}_j] = v_j$ が成立する，すなわち $\widehat{v}_j$ は v_j の不偏推定量である．

2.2.3 $C_{i,j}$ の推定

推定 2.10 $i + j \geqq n + 2$ のとき，$C_{i,j}$ を次で推定する：

$$\widehat{C}_{i,j} = C_{i,n+1-i} \widehat{f}_{n+1-i} \cdots \widehat{f}_{j-1}.$$

この推定量を用いることは次の命題で正当化される：

命題 2.11 $i + j \geqq n + 2$ のとき，次が成立する：

$$E[\widehat{C}_{i,j} | \mathcal{B}_{n+1-i}] = E[C_{i,j} | \mathcal{D}] = C_{i,n+1-i} f_{n+1-i} \cdots f_{j-1}.$$

特に $E[\widehat{C}_{i,j}] = E[C_{i,j}]$ である．

2.3 Mack モデルにおける区間推定：Mack の公式

$i = 2, \ldots, n$ とする．このとき，上で定義した $C_{i,n}$ の推定量 $\widehat{C}_{i,n}$ の**平均 2 乗誤差** (mean squared error) を次で定義する：

$$\operatorname{mse} \widehat{C}_{i,n} = E\big[(C_{i,n} - \widehat{C}_{i,n})^2 \big| \mathcal{D} \big].$$

平均 2 乗誤差を用いると，例えば $C_{i,n}$ の 95% 信頼区間を $\big(\widehat{C}_{i,n} - 3(\operatorname{mse} \widehat{C}_{i,n})^{1/2}, \widehat{C}_{i,n} - 3(\operatorname{mse} \widehat{C}_{i,n})^{1/2} \big)$ などで推定することができる．

Mack は次のような $\operatorname{mse} \widehat{C}_{i,n}$ の推定量を与えた：

推定 2.12 $i=2,\dots,n$ に対して $\operatorname{mse}\widehat{C}_{i,n}$ を次で推定する：

$$\widehat{C}_{i,n}^2 \sum_{l=n+1-i}^{n-1} \frac{\widehat{v}_l}{\widehat{f}_l^2}\left(\frac{1}{\widehat{C}_{i,l}} + \frac{1}{\sum_{m=1}^{n-l} C_{m,l}}\right).$$

また，支払備金 $R=\sum_{i=2}^n (C_{i,n}-C_{i,n+1-i})$ の推定量 $\widehat{R}=\sum_{i=2}^n(\widehat{C}_{i,n}-C_{i,n+1-i})$ の平均 2 乗誤差 $\operatorname{mse}\widehat{R}=E\big[(R-\widehat{R})^2\big|\mathcal{D}\big]$ も次のように推定した：

推定 2.13 $\operatorname{mse}\widehat{R}$ を次で推定する：

$$\sum_{i=2}^{n}\left(\widehat{C}_{i,n}^2 \sum_{l=n+1-i}^{n-1} \frac{\widehat{v}_l}{\widehat{f}_l^2}\left(\frac{1}{\widehat{C}_{i,l}} + \frac{1}{\sum_{m=1}^{n-l} C_{m,l}}\right)\right) + 2\sum_{i=2}^{n-1}\widehat{C}_{i,n}\left(\sum_{i'=i+1}^{n}\widehat{C}_{i',n}\right)\left(\sum_{l=n+1-i}^{n-1}\frac{\widehat{v}_l}{\widehat{f}_l^2\sum_{m=1}^{n-l}C_{m,l}}\right).$$

3 Mack の公式の拡張

3.1 Mack モデルの拡張

Mack モデルの仮定には仮定 2.1，仮定 2.2，仮定 2.3 の 3 つがあったが，仮定 2.3 は 2 次の量である $V(C_{i,j+1}|\mathcal{G}_{i,j})$ を $C_{i,j}$ に比例すると考えている．これはチェーンラダー法を正当化するために不可欠なものであったが，ほかの仮定に比べて必ずしも自然であるとはいえない．そこで α を任意の固定された実数とし，仮定 2.3 を次で置き換える：

仮定 3.1 各 $j=1,\dots,n-1$ に対して正の定数 v_j が存在し，任意の $i=1,\dots,n$ に対して次が成立する：

$$V(C_{i,j+1}|\mathcal{G}_{i,j}) = C_{i,j}^{\alpha} v_j.$$

注意 3.2 $\alpha=1$ のとき，この仮定は仮定 2.3 と一致する．

以下の議論では**仮定 2.1**，**仮定 2.2**，**仮定 3.1** の 3 つを基に議論を進める．

3.2 点推定

点推定については，Mack モデルの場合とほぼ同じ結果が得られる．ただし，α を導入したためチェーンラダー法とは必ずしも一致しない．

3.2.1 f_j の推定

推定 3.3 $j=1,\dots,n-1$ に対して，f_j を次で推定する：

$$\widehat{f}_j = \frac{C_{1,j}^{1-\alpha}C_{1,j+1} + \cdots + C_{n-j,j}^{1-\alpha}C_{n-j,j+1}}{C_{1,j}^{2-\alpha} + \cdots + C_{n-j,j}^{2-\alpha}}.$$

命題 3.4 $j=1,\dots,n-1$ を固定し，和が 1 であるような $\mathcal{B}_j$ 可測な非負確率変数 $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-j}$ を用いて

$$\lambda_1 \frac{C_{1,j+1}}{C_{1,j}} + \cdots + \lambda_{n-j} \frac{C_{n-j,j+1}}{C_{n-j,j}}$$

と書ける量を考えると，次が成立する：

(1) $\widehat{f}_j$ はこのように書ける．

(2) このように書ける量はすべて f_j の不偏推定量である．特に $\widehat{f}_j$ は f_j の不偏推定量である．

(3) 上のように書ける量のうち，$\widehat{f}_j$ は $V(\cdot|\mathcal{B}_j)$ および $V(\cdot)$ を最小にする．この意味で $\widehat{f}_j$ は最良推定量である．

3.2.2 $\boldsymbol{v_j}$ の推定

推定 3.5 $j=1,\dots,n-2$ に対して v_j を

$$\widehat{v}_j = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}^{2-\alpha} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \widehat{f}_j \right)^2$$

で推定し，v_{n-1} を

$$\widehat{v}_{n-1} = \min\left\{ \frac{\widehat{v}_{n-2}^2}{\widehat{v}_{n-3}}, \widehat{v}_{n-2}, \widehat{v}_{n-3} \right\}.$$

で推定する．

命題 3.6 $j=1,\dots,n-2$ に対して $E[\widehat{v}_j|\mathcal{B}_j]=v_j$ が成立する．したがって $E[\widehat{v}_j]=v_j$ が成立する，すなわち $\widehat{v}_j$ は v_j の不偏推定量である．

3.2.3 $\boldsymbol{C_{i,j}}$ の推定

推定 3.7 $i+j \geqq n+2$ のとき，$C_{i,j}$ を次で推定する：

$$\widehat{C}_{i,j} = C_{i,n+1-i} \widehat{f}_{n+1-i} \cdots \widehat{f}_{j-1}.$$

命題 3.8 $i+j \geqq n+2$ のとき，次が成立する：

$$E[\widehat{C}_{i,j}|\mathcal{B}_{n+1-i}] = E[C_{i,j}|\mathcal{D}] = C_{i,n+1-i} f_{n+1-i} \cdots f_{j-1}.$$

特に $E[\widehat{C}_{i,j}] = E[C_{i,j}]$ である．

3.3　区間推定：Mack の公式の拡張

この小節では本論文の主結果を述べる．

まず，各 $i = 1, \ldots, n$ に対して自然数 j_i, k_i は $n+1-i \leqq j_i \leqq k_i \leqq n$ を満たすとし，

$$S = \sum_{i=1}^{n} (C_{i,k_i} - C_{i,j_i})$$

と定義する．S は

$$\widehat{S} = \sum_{i=1}^{n} (\widehat{C}_{i,k_i} - \widehat{C}_{i,j_i})$$

で推定でき（ただし $\widehat{C}_{i,n+1-i} = C_{i,n+1-i}$ とおく），この推定量の平均 2 乗誤差

$$\operatorname{mse} \widehat{S} = E\big[(S - \widehat{S})^2 \big| \mathcal{D}\big]$$

を考える．

例 3.9 $j_i = n+1-i$, $k_i = n$ $(i = 1, \ldots, n)$ のとき，S は支払備金 R に一致する．

例 3.10 $p + q \geqq n+2$ なる $p, q = 1, \ldots, n$ を取る．$i \neq p$ に対しては $j_i = k_i = n+1-i$ とおき，$j_p = n+1-p$, $k_p = q$ とおくと

$$S = C_{p,q} - C_{p,n+1-p}$$

となり，$\operatorname{mse} \widehat{S} = \operatorname{mse} \widehat{C}_{p,q}$ が成立する．

例 3.11 $t = 1, \ldots, n-1$ とし，$i = 1, \ldots, t$ に対しては $j_i = k_i = n+1-i$ とおき，$i = t+1, \ldots, n$ に対しては $j_i = n-i+t$, $k_i = n+1-i+t$ とおく．このとき

$$S = \sum_{i=t+1}^{n} (C_{i,n+1-i+t} - C_{i,n-i+t})$$

となり，これは事故年度が $t+1, \ldots, n$ の事故に対して t 年後に支払うべき保険金を表す．

以上の例から，様々な興味深い値が S の形で書けることが分かる．

記法の簡便のため，いくつか記号を用意する．$i + j \leqq n+1$ のとき $\widehat{C}_{i,j} = C_{i,j}$ とおく．$\widehat{f}_n = 1$ とおく（推定 3.12 から分かるように，実際には $\widehat{f}_n$ の値は最小 2 乗誤差の公式には影響しない）．$i, l = 1, \ldots, n$ に対して $\widehat{A}_{i,l}$, $\widehat{B}_l$ を

$$\widehat{A}_{i,l} = \frac{\widehat{v}_l}{\widehat{f}_l^2} \left(\frac{1}{\widehat{C}_{i,l}^{2-\alpha}} + \frac{1}{\sum_{m=1}^{n-l} C_{m,l}^{2-\alpha}} \right), \qquad \widehat{B}_l = \frac{\widehat{v}_l}{\widehat{f}_l^2 \sum_{m=1}^{n-l} C_{m,l}^{2-\alpha}}$$

で定義し，$\widehat{\varphi}_{i,l}$ を

$$\widehat{\varphi}_{i,l} = \begin{cases} \widehat{C}_{i,k_i} - \widehat{C}_{i,j_i} & (n+1-i \leqq l < j_i), \\ \widehat{C}_{i,k_i} & (j_i \leqq l < k_i), \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

で定義する．

次が本講演の主結果である：

推定 3.12 $\operatorname{mse}\widehat{S}$ を次で推定する：

$$\sum_{i,l=1}^{n}\widehat{\varphi}_{i,l}^{2}\widehat{A}_{i,l}+2\sum_{1\leqq i<i'\leqq n}\sum_{l=1}^{n}\widehat{\varphi}_{i,l}\widehat{\varphi}_{i',l}\widehat{B}_{l}.$$

これを例 3.9，例 3.10，例 3.11 の場合に適用すると次の 3 つの推定量を得る：

推定 3.13 $i+j\geqq n+2$ のとき，$\operatorname{mse}\widehat{C}_{i,j}$ を次で推定する：

$$\widehat{C}_{i,j}^{2}\sum_{l=n+1-i}^{j-1}\widehat{A}_{i,l}.$$

注意 3.14 $\alpha=1,\,j=n$ のとき，これは推定 2.12 と一致する．

推定 3.15 支払備金 $R=\sum_{i=2}^{n}(C_{i,n}-C_{i,n+1-i})$ に対して，$\operatorname{mse}\widehat{R}$ を次で定義する：

$$\sum_{i=2}^{n}\left(\widehat{C}_{i,n}^{2}\sum_{l=n+1-i}^{n-1}\widehat{A}_{i,l}\right)+2\sum_{i=2}^{n}\left(\widehat{C}_{i,n}\left(\sum_{i'=i+1}^{n}\widehat{C}_{i',n}\right)\left(\sum_{l=n+1-i}^{n-1}\widehat{B}_{l}\right)\right).$$

注意 3.16 $\alpha=1$ のとき，これは推定 2.13 と一致する．

推定 3.17 $t=1,\dots,n-1$ とし，事故年度が $t+1,\,\dots,\,n$ の事故に対して t 年後に支払うべき保険金 $S=\sum_{i=t+1}^{n}(C_{i,n+1-i+t}-C_{i,n-i+t})$ に対して $\operatorname{mse}\widehat{S}$ を次で推定する：

$$\begin{aligned}&\sum_{i=t+1}^{n}\sum_{l=n+1-i}^{n-i+t-1}\widehat{X}_{i,n+1-i+t}^{2}\widehat{A}_{i,l}+\sum_{i=t+1}^{n}\widehat{C}_{i,n+1-i+t}^{2}\widehat{A}_{i,n-i+t}\\&+2\sum_{i=t+1}^{n-1}\sum_{i'=i+1}^{\min\{i+t-1,n\}}\sum_{l=n+1-i}^{n-i'+t-1}\widehat{X}_{i,n+1-i+t}\widehat{X}_{i',n+1-i'+t}\widehat{B}_{l}\\&+2\sum_{i=t+1}^{n-1}\sum_{i'=i+1}^{\min\{i+t-1,n\}}\widehat{X}_{i,n+1-i+t}\widehat{C}_{i',n+1-i'+t}\widehat{B}_{n-i'+t}.\end{aligned}$$

ただし，$\widehat{X}_{i,j}$ は事故年度 i，経過年数 j における単年度支払保険金の推定量であり，次で定義される：

$$\widehat{X}_{i,j}=\begin{cases}\widehat{C}_{i,j}-\widehat{C}_{i,j-1} & (j=2,\dots,n),\\ \widehat{C}_{i,1} & (j=1).\end{cases}$$

特に $t=1$ のとき，$\operatorname{mse}\widehat{S}$ を次で推定する：

$$\sum_{i=2}^{n}\widehat{C}_{i,n+2-i}^{2}\widehat{A}_{i,n+1-i}.$$

参考文献

[1] T. Mack, *Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates*, ASTIN Bulletin, **23** (1993) no. 2, 213–225. `http://www.casact.org/library/astin/vol23no2/213.pdf` からダウンロード可能.

[2] T. Mack, *Measuring the variability of chain ladder reserve estimates*, Casualty Actuarial Society Forum (1994) Spring, vol. 1, 101–182. `http://www.casact.org/pubs/forum/94spforum/94spf101.pdf` からダウンロード可能.

[3] S. Saito, *Generalisation of Mack's formula for claims reserving with arbitrary exponents for the variance assumption*, Journal of Math-for-industry, **1** (2009A), 7–15. `http://gcoe-mi.jp/publish_list/pub_inner/id:4/cid:9` からダウンロード可能.

[4] 斎藤新悟『Mack の公式：支払備金の区間推定』. 谷口説男編，プロシーディング「損保数理に現れる確率モデル」—日新火災・九州大学共同研究 2008 年 11 月研究会—，MI レクチャーノート，**13** (2009). `http://gcoe-mi.jp/publish_list/pub_inner/id:2/cid:10` からダウンロード可能.