正規コピュラの漸近的裾依存性

近藤宏樹 [1]　斎藤新悟 [2]

[1] 日新火災海上保険株式会社

[2] 九州大学大学院数理学研究院

2010/10/02

谷口説男氏（九州大学大学院数理学研究院）との共同研究

はじめに

分布を調べたい確率変数 Z が既知の確率変数 X, Y の和として表されているとする：

$$Z = X + Y.$$

$\longrightarrow X, Y$ の分布の他にそれらの依存関係を知る必要がある．

相関係数 $\rho(X, Y)$ が分かれば標準偏差 $\sigma(Z)$ は次の式から分かる：

$$\sigma^2(Z) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) + 2\sigma(X)\sigma(Y)\rho(X, Y).$$

しかし，Z の Value at Risk, Tail Value at Risk は分からない．

コピュラとは

周辺分布が $[0,1]$ 上の一様分布に従うような 2 次元確率変数の同時分布関数をコピュラという.

定義

コピュラとは，関数 $C\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ であって，次を満たす確率変数 (U,V) が存在するようなもの：

- $P(U \leqq u) = u,\ P(V \leqq v) = v\ (u, v \in [0,1])$.
  $\longleftarrow$ U, V は $[0,1]$ 上の一様分布に従う.
- $C(u,v) = P(U \leqq u,\ V \leqq v)\ (u, v \in [0,1])$.
  $\longleftarrow$ C は U, V の同時分布関数.

コピュラは確率変数間の依存関係を完全に記述する.

Sklar の定理 (1)

(X, Y) : 連続型（周辺分布関数 F_X, F_Y が連続）2 次元確率変数.
$F(x, y) = P(X \leqq x,\ Y \leqq y)$: 同時分布関数.
このとき,

$$F(x, y) = C\big(F_X(x), F_Y(y)\big)$$

を満たすコピュラ C がただ 1 つ存在する.

上のコピュラ C を (X, Y) が定めるコピュラと呼ぶ.

Sklar の定理 (2)

Sklar の定理 (2)

F_1, F_2 : 連続な分布関数.
C : コピュラ.
このとき，次を満たす 2 次元確率変数 (X,Y) が存在する：

- 周辺分布関数は F_1, F_2.
- (X,Y) が定めるコピュラは C.

標語的には，

$$\boxed{\text{同時分布}} = \boxed{\text{周辺分布}} + \boxed{\text{コピュラ}}.$$

コピュラの例

- 積コピュラ $C(u,v)=uv$.
  $\longleftarrow$ 独立な X, Y に対応.
- Fréchet-Hoeffding 上界 $C(u,v)=\min\{u,v\}$.
  $\longleftarrow$ $Y=\varphi(X)$（φ は単調増加）に対応.
- Fréchet-Hoeffding 下界 $C(u,v)=\max\{u+v-1,0\}$.
  $\longleftarrow$ $Y=\varphi(X)$（φ は単調減少）に対応.
- Clayton コピュラ $C(u,v)=(u^{-a}+v^{-a}-1)^{-\frac{1}{a}}$ $(a>0)$.
- 正規コピュラ C_ρ：期待値 $(0,0)$，分散共分散行列 $\begin{pmatrix}1 & \rho \\ \rho & 1\end{pmatrix}$ の 2 変量正規分布に従う確率変数 (X,Y) が定めるコピュラ $(-1<\rho<1)$.

裾依存性とコピュラ

日新火災海上保険株式会社
Math-for-industry Education & Research Hub

(X, Y)：連続型 2 次元確率変数.

定義

(X, Y) の t $(0 < t < 1)$ での**裾依存度** $\lambda_{X,Y}(t)$ および**裾依存係数** $\lambda_{X,Y}$ を次で定義する：

$$\lambda_{X,Y}(t) = P\big(F_Y(Y) > t \,\big|\, F_X(X) > t\big), \qquad \lambda_{X,Y} = \lim_{t \nearrow 1} \lambda_{X,Y}(t).$$

命題

(X, Y) が定めるコピュラを C とすると,

$$\lambda_{X,Y}(t) = \frac{1 - 2t + C(t,t)}{1 - t}.$$

特に，$\lambda_{X,Y}(t)$, $\lambda_{X,Y}$ は C のみによって決まる.

裾依存度の例

- 積コピュラ $C(u,v) = uv$
  $\Longrightarrow \ \lambda(t) = 1 - t,\ \lambda = 0.$
- Fréchet-Hoeffding 上界 $C(u,v) = \min\{u,v\}$
  $\Longrightarrow \ \lambda(t) = 1,\ \lambda = 1.$
- Fréchet-Hoeffding 下界 $C(u,v) = \max\{u+v-1, 0\}$
  $\Longrightarrow \ \lambda(t) = 0 \left(t \geqq \frac{1}{2}\right),\ \lambda = 0.$
- Clayton コピュラ $C(u,v) = (u^{-a} + v^{-a} - 1)^{-\frac{1}{a}}\ (a > 0)$
  $\Longrightarrow \ \lambda(t) = \dfrac{1 - 2t + (2t^{-a} - 1)^{-\frac{1}{a}}}{1 - t},\ \lambda = 0.$
- 正規コピュラ $C_\rho\ (-1 < \rho < 1)$
  $\Longrightarrow \ \lambda = 0.$

Fréchet-Hoeffding 下界，Clayton コピュラ，正規コピュラの裾依存性は積コピュラ（独立性）と同じ？

裾依存度の比較

日新火災海上保険株式会社
Math-for-industry Education & Research Hub

コピュラ	積	FH 下界	Clayton $(a=1)$	正規 $(\rho=0.5)$
$t=0.8$	0.2000	0.0000	0.3333	0.4358
$t=0.9$	0.1000	0.0000	0.1818	0.3240
$t=0.95$	0.0500	0.0000	0.0952	0.2438
$t=0.99$	0.0100	0.0000	0.0198	0.1294
$t=0.995$	0.0050	0.0000	0.0100	0.0993
$t=0.999$	0.0010	0.0000	0.0020	0.0543

$\longrightarrow$ 極限値はすべて 0 でも近づき方が異なる．
実務的には，極限値よりも例えば $t=0.995$ での値の方が重要．

漸近挙動

- 積コピュラ：$\lambda(t) = 1 - t.$
- FH 下界：$\lambda(t) = 0.$
- Clayton コピュラ：$\lambda(t) = (1+a)(1-t) - (a+a^2)(1-t)^2 + \cdots.$
- 正規コピュラ：

主定理

正規コピュラ C_ρ について

$$\lambda(t) = \sqrt{\frac{(1+\rho)^3}{2\pi(1-\rho)}} e^{-\frac{1-\rho}{2(1+\rho)}s^2} \left(\frac{1}{s} - \frac{1+2\rho-\rho^2}{1-\rho} \cdot \frac{1}{s^3} + \cdots \right)$$

$$\sim (4\pi)^{-\frac{\rho}{1+\rho}} \sqrt{\frac{(1+\rho)^3}{1-\rho}} (1-t)^{\frac{1-\rho}{1+\rho}} \left(-\log(1-t)\right)^{-\frac{\rho}{1+\rho}}.$$

ただし $t = \Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{s} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$（標準正規分布の分布関数）.