正規コピュラの漸近的裾依存性

近藤宏樹（日新火災海上保険株式会社）
斎藤新悟（九州大学大学院数理学研究院）

1　はじめに

当研究成果は，著者らが日新火災海上保険株式会社と九州大学大学院数理学研究院との共同研究に携わる中で谷口説男氏（九州大学大学院数理学研究院）と共同で得たものである．

会社の抱える不確実性（リスク）を定量化し評価するためには，不確実な要素がもたらす会社の損益への影響を確率変数として捉えて分析するのが一般的である．この際通常は，いくつかの異なる種類のリスク（異なる種目の保険引受リスクなど）を確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ によってモデル化した後それらを統合する，つまり確率変数 $X_1 + \cdots + X_n$ について調べるという段階を踏むことになる．

確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ が独立だと仮定すれば，それぞれの確率変数の従う分布から和 $X_1 + \cdots + X_n$ の分布が決定できる．しかし一般には各 X_i の間にある依存関係を適切に織り込まなければ和 $X_1 + \cdots + X_n$ を分析することはできない．

2 つの確率変数 X, Y の相関を示す指標としては相関係数 $\rho(X, Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$ がある．相関係数は確率変数間の線形な関係を示すものであり，例えば $X_1 + \cdots + X_n$ の標準偏差は各 X_i の期待値，標準偏差および X_i 間の相関係数から算出できるためよく用いられる指標である．

しかし近年では，確率変数 X の変動を捉えるために標準偏差ではなく確率点（バリューアットリスク）や確率点以上における条件付き期待値（テイルバリューアットリスク）が用いられることが多くなってきた．このような視点から見ると，各 X_i の分布と相関係数だけでは和 $X_1 + \cdots + X_n$ の分布について十分な情報であるとはいえない．また，相関係数はそれぞれの確率変数の周辺分布にも依存するため，確率変数間の依存関係を純粋に取り出した指標ではないという欠点もある．

これらを克服する依存関係の指標として**コピュラ**がある．コピュラによるリスク統合の手法は近年活発に研究されており，モデル化において適切なコピュラを選択する方針についてもいくつか考察がなされている．そのうちの 1 つに，多次元正規分布に由来する正規コピュラはリスク統合の際に重要視される裾依存性を捉えられないとする説明があるが，本論文はこの点について裾依存性の漸近挙動を考慮に入れた再検討を行うものである．

以下第 2 節でコピュラの定義と簡単な性質を述べた後，第 3 節で代表的なコピュラの例を紹介し，裾依存性との関係を第 4 節以下で論じる．なお，命題や定理の証明は省略したので，本論文の研究成果についての詳細は [2] を，コピュラの基礎については [3] を参照されたい．

2　確率変数の依存関係とコピュラ

n 次元確率変数の依存関係を示す指標である**コピュラ**は次のように定義される：

定義 2.1 周辺分布が $[0,1]$ 上の一様分布に従うような n 次元確率変数の同時分布関数を n 次元の**コピュラ**という．すなわちコピュラとは，関数 $C\colon [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ であって，確率変数 $(U_1,\ldots,U_n)$ が存在して次を満たすようなものをいう：

- 各 $i=1,\ldots,n$ に対して $P(U_i \leqq u) = u$ $(u \in [0,1])$.
- $C(u_1,\ldots,u_n) = P(U_1 \leqq u_1,\ldots,U_n \leqq u_n)$.

2 次元の場合に具体的な関数がコピュラであるかどうかを判定するためには，次の特徴づけが便利である：

命題 2.2 $C\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ が 2 次元のコピュラであることと，次の 2 条件を満たすことは同値である：

- 任意の $u,v \in [0,1]$ に対して $C(u,0) = C(0,v) = 0$, $C(u,1) = u$, $C(1,v) = v$.
- $0 \leqq u_1 \leqq u_2 \leqq 1$, $0 \leqq v_1 \leqq v_2 \leqq 1$ ならば $C(u_2,v_2) - C(u_1,v_2) - C(u_2,v_1) + C(u_1,v_1) \geqq 0$.

コピュラによって確率変数の依存関係が取り出せることは，次の基本定理により保証される．n 次元確率変数 $(X_1,\ldots,X_n)$ が**連続型**であるとは，各成分 X_i の分布関数 $F_{X_i}(x) = P(X_i \leqq x)$ が連続関数であることをいう．

定理 2.3 (Sklar の定理) $(X_1,\ldots,X_n)$ を連続型の n 次元確率変数とし，$F(x_1,\ldots,x_n) = P(X_1 \leqq x_1,\ldots,X_n \leqq x_n)$ をその同時分布関数とする．このとき，

$$F(x_1,\ldots,x_n) = C\bigl(F_{X_1}(x_1),\ldots,F_{X_n}(x_n)\bigr)$$

を満たす n 次元コピュラ C がただ 1 つ存在する．これを $(X_1,\ldots,X_n)$ が定めるコピュラと呼ぶ.

定理 2.4 $F_1,\ldots,F_n$ を連続な分布関数，C を n 次元コピュラとするとき，n 次元確率変数 $(X_1,\ldots,X_n)$ であって次を満たすものが存在する：

- X_i の分布関数は F_i である.
- $(X_1,\ldots,X_n)$ が定めるコピュラは C である.

これらの定理から，コピュラには

- 周辺分布とコピュラの情報からもとの多次元確率変数が完全に復元できる（分布の情報が全て保存されている），
- 周辺分布とコピュラを別個に自由に選ぶことができる

という利点があり，多次元確率変数を**各周辺分布（1 次元分布）とそれらの間の依存関係を表すコピュラとに分けて分析できる**ことが分かる．

例えば未知の分布に従う多次元確率変数 $(X_1,\ldots,X_n)$ のサンプルデータから分布推定を行う際には，次のような手順に従えばよい：

(i) 各 X_i の従う 1 次元分布 F_{X_i} を推定する．

(ii) $\big(F_{X_1}(X_1),\dots,F_{X_n}(X_n)\big)$ の実現値から，$(X_1,\dots,X_n)$ を定めるコピュラを推定する．

手順 (i) は 1 次元分布の推定であり，既知の手法が多くあることから，手順 (ii) つまりコピュラをどのように選択するかが問題となる．コピュラの選択方法については次節以降で議論するが，本節の最後にコピュラが大小関係を変えない変換について不変であることを注意しておく：

命題 2.5 $(X_1,\dots,X_n)$ を連続型の n 次元確率変数とし，$\varphi_i\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ $(i=1,\dots,n)$ を狭義単調増加関数とする．このとき，$(X_1,\dots,X_n)$ が定めるコピュラと $\big(\varphi_1(X_1),\dots,\varphi_n(X_n)\big)$ が定めるコピュラは等しい．

3 コピュラの例

1 次元確率変数を分析する際には，通常いくつかの種類の理論分布（正規分布・対数正規分布・ガンマ分布など）を想定した上で，実績データの性質と合致する分布を選択する．そこで，コピュラによる多次元確率分布の分析を行うためには，予め様々な特性を持つコピュラの例を用意しておく必要がある．

以下では，2 次元分布の場合に限って議論を進める．

3.1 積コピュラ，上界と下界

まずは，簡単な例を述べる．

例 3.1 $\Pi(u_1,u_2)=u_1u_2$ はコピュラを与える．これを**積コピュラ**という．積コピュラは独立な確率変数 X_1, X_2 に対応する．

命題 3.2 $M(u_1,u_2)=\min\{u_1,u_2\}$, $W(u_1,u_2)=\max\{u_1+u_2-1,0\}$ とおく．

(i) M, W はコピュラである．

(ii) 任意のコピュラ C，$u_1,u_2\in[0,1]$ に対して

$$W(u_1,u_2)\leqq C(u_1,u_2)\leqq M(u_1,u_2)$$

が成り立つ．

M, W をそれぞれ **Fréchet-Hoeffding 上界**，**Fréchet-Hoeffding 下界**という．M は X_1, X_2 の大小関係が完全に一致するときに対応するコピュラ，W は X_1, X_2 の大小関係が完全に逆転するときに対応するコピュラである．

3.2 Archimedes コピュラ

ある種の連続関数を用いてコピュラの族を作り出すことができる：

命題 3.3 関数 $\varphi\colon [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$ は次を満たすと仮定する：

- φ は連続である．
- φ は狭義単調減少である．
- φ は下に凸である．
- $\varphi(1)=0$ が成り立つ．

このとき，$\varphi^{[-1]}\colon [0,\infty] \longrightarrow [0,1]$ を $\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & (t \leqq \varphi(0) \text{ のとき}) \\ 0 & (t > \varphi(0) \text{ のとき}) \end{cases}$ と定めると，

$$C(u_1,u_2) = \varphi^{[-1]}\bigl(\varphi(u_1)+\varphi(u_2)\bigr)$$

はコピュラである．これを φ に付随する **Archimedes コピュラ**という．

例 3.4 (Clayton コピュラ) $a \in (0,\infty)$ に対し $\varphi(t) = \dfrac{t^{-a}-1}{a}$ とおくと命題の条件を満たす．付随する Archimedes コピュラは

$$C(u_1,u_2) = (u_1^{-a}+u_2^{-a}-1)^{-\frac{1}{a}} \quad (u_1,u_2 \neq 0)$$

を満たす．これを **Clayton コピュラ**という．

例 3.5 (Gumbel コピュラ) $a \in [1,\infty)$ に対し $\varphi(t) = (-\log t)^a$ とおくと命題の条件を満たす．付随する Archimedes コピュラは

$$C(u_1,u_2) = \exp\Bigl(-\bigl((-\log u_1)^a + (-\log u_2)^a\bigr)^{\frac{1}{a}}\Bigr) \quad (u_1,u_2 \neq 0)$$

を満たす．これを **Gumbel コピュラ**という．なお $a=1$ のときは積コピュラに等しい．

例 3.6 (Frank コピュラ) $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ に対し $\varphi(t) = -\log \dfrac{e^{-at}-1}{e^{-a}-1}$ とおくと命題の条件を満たす．付随する Archimedes コピュラは

$$C(u_1,u_2) = -\frac{1}{a}\log\biggl(\frac{(e^{-au_1}-1)(e^{-au_2}-1)}{e^{-a}-1}+1\biggr)$$

を満たす．これを **Frank コピュラ**という．

3.3 多次元分布が定めるコピュラ

前節での議論により，既知の多次元分布があれば対応するコピュラが定まる．

例 3.7 (正規コピュラ) 多次元正規分布が定めるコピュラを**正規コピュラ**または **Gauss コピュラ**という．各成分の相関行列が等しい多次元正規分布どうしは各成分の正の定数倍で移りあうことに注意すると，相関行列を与えることでコピュラが定まることが分かる．すなわち，V を対角成分が 1 であるような 2 次正定値対称行列とし，Φ_V を平均 0，分散共分散行列 V の 2 次元分布の同時分布関数とするとき，相関行列 V の正規コピュラは

$$C(u_1,u_2) = \Phi_V\bigl(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)\bigr)$$

で定義される（Φ は標準正規分布の分布関数）．

例 3.8 ($\boldsymbol{t}$ コピュラ) 多次元 t 分布が定めるコピュラを **$\boldsymbol{t}$ コピュラ**という．正規コピュラと同様に，2 次元の t コピュラは自由度 ν および相関行列 V を決めるごとに定まる．

4　裾依存性とコピュラ

導入部で触れたように，個々のリスク対象区分の不確実性を確率変数として捉えてそれらをコピュラによって統合する際には，分布の裾部分つまり 0 や 1 に近い確率点付近での依存関係ができる限り正確に反映されるべきであると考えられる．そこで，確率変数の間の裾部分での依存を表す指標を導入する．

以下特に断らない限り，(X, Y) を連続型の 2 次元確率変数とし，X, Y の分布関数をそれぞれ F_X, F_Y とする．

4.1　裾依存係数

定義 4.1 $t \in (0,1)$ に対し，(X, Y) の t での**（上側）裾依存度** $\lambda^U(t) = \lambda^U_{X,Y}(t)$ を

$$\lambda^U(t) = P\big(F_Y(Y) > t \bigm| F_X(X) > t\big)$$

で定める．また $\lambda^U = \lambda^U_{X,Y} = \lim_{t \nearrow 1} \lambda^U(t)$ とおき，(X, Y) の**（上側）裾依存係数**と呼ぶ．

$\lambda^U(t)$ は X が t 確率点より大きい値をとるという条件の下で Y が t 確率点よりも大きい値をとる条件付き確率であるから，確率変数 X, Y が同時に大きい値をとる度合いを表していると考えることができる．なお，定義から明らかなように $\lambda^U(t), \lambda^U \in [0,1]$ である．

例 4.2 X, Y が独立のとき，$\lambda^U(t) = P\big(F_Y(Y) > t \bigm| F_X(X) > t\big) = P\big(F_Y(Y) > t\big) = 1 - t$, $\lambda^U = 0$ である．

命題 4.3 C を (X, Y) が定めるコピュラとするとき，$\lambda^U(t) = \dfrac{1 - 2t + C(t,t)}{1 - t}$ が成り立つ．

この命題により，裾依存度はコピュラによって決まることが分かる．以下では，コピュラ C を持つような確率変数 (X, Y) の裾依存度または裾依存係数を C の裾依存度または裾依存係数とも呼ぶことにする．また $\lambda^U_{X,Y}(t) = \lambda^U_{Y,X}(t)$，つまり (X, Y) の裾依存度と (Y, X) の裾依存度が等しいことも分かる．

一方の成分による条件付き分布が所与の場合には，裾依存係数を次のように求めることもできる：

命題 4.4 (X, Y) のコピュラ C が連続微分可能であるとする．$U_X = F_X(X)$, $U_Y = F_Y(Y)$ とおくとき次が成り立つ：

$$\lambda^U_{X,Y} = \lim_{t \nearrow 1} \big(P(U_Y > t \mid U_X = t) + P(U_X > t \mid U_Y = t)\big).$$

4.2 各コピュラの裾依存係数

前節で挙げたコピュラ（2 次元の場合）の裾依存度および裾依存係数は次のように計算される．

積コピュラ　$\lambda^U(t) = 1 - t,\ \lambda^U = 0.$

Fréchet-Hoeffding 上界　$\lambda^U(t) = 1,\ \lambda^U = 1.$

Fréchet-Hoeffding 下界　$\lambda^U(t) = \begin{cases} \dfrac{1-2t}{1-t} & (t \leqq 1/2) \\ 0 & (t > 1/2) \end{cases},\ \lambda^U = 0.$

Clayton コピュラ　$\lambda^U(t) = \dfrac{1 - 2t + (2t^{-a} - 1)^{-\frac{1}{a}}}{1-t},\ \lambda^U = 0.$

Gumbel コピュラ　$\lambda^U(t) = \dfrac{1 - 2t + t^{2^{1/a}}}{1-t},\ \lambda^U = 2 - 2^{\frac{1}{a}}.$

Frank コピュラ　$\lambda^U(t) = \dfrac{1 - 2t - \frac{1}{a}\log\left(\frac{e^{-2at} - e^{-at} + e^{-a}}{e^{-a} - 1}\right)}{1-t},\ \lambda^U = 0.$

正規コピュラ　$\lambda^U = 0.$

$\boldsymbol{t}$ **コピュラ**　$\lambda^U = 2 - 2t_{\nu+1}\left(\sqrt{(\nu+1)\dfrac{1-\rho}{1+\rho}}\right)$（相関行列 $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$，$t_{\nu+1}$ は自由度 $\nu + 1$ の t 分布の分布関数）.

注意 4.5 正規コピュラおよび t コピュラの裾依存度は複雑なため表示していない．

5 漸近的裾依存性

定義から見て取れるように，裾依存係数 $\lambda^U > 0$ であれば確率変数 X, Y（またはコピュラ）は分布の裾部分で強い依存関係を持っていると考えられる．

問　逆に，$\lambda^U = 0$ ならば分布の裾部分での依存関係が無いということは結論づけられるだろうか？

従来の文脈では，$\lambda^U = 0$ の場合は積コピュラと同じく裾部分での依存関係が無く，したがってリスク統合などの用途には $\lambda^U = 0$ なるコピュラ（例えば正規コピュラ）はモデリングに適さないとされていた．しかしながら，こと実務的な観点からは，裾依存度において $t \nearrow 1$ とした**極限値**である裾依存係数よりも，$t \nearrow 1$ での**漸近挙動**が重要であると考えられる．そこで前節に例示したコピュラについて，t が 1 に近い値のときの $\lambda^U(t)$ を計算すると表 1，表 2 のような数値が得られる．

これらより，$\lambda^U = 0$ なるコピュラについても $t = 0.995$ や $t = 0.999$ の場合に積コピュラとそれ以外で無視できない違いがあることが分かる．また積コピュラの場合との数値の比を見ると，Clayton コピュラや Frank コピュラでは t が 1 に近づくに従ってほぼ一定の値となっている一方，正規コピュラでは増加傾向が強く見られることから，Clayton コピュラや Frank コピュラと正規コピュラの間にも漸近挙動の違いがあると推察される．

実際，Clayton コピュラおよび Frank コピュラについては次のように，$\lambda^U(t)$ は $t \nearrow 1$ のときに 1 次的な振る舞いをすることが分かる：

表 1　裾依存度

コピュラ	積	正規	t	Clayton	Gumbel	Frank
$t = 0.8$	0.2000	0.4358	0.4611	0.3333	0.5086	0.4209
$t = 0.9$	0.1000	0.3240	0.3842	0.1818	0.4599	0.2597
$t = 0.95$	0.0500	0.2438	0.3387	0.0952	0.4361	0.1476
$t = 0.99$	0.0100	0.1294	0.2877	0.0198	0.4173	0.0332
$t = 0.995$	0.0050	0.0993	0.2770	0.0100	0.4149	0.0169
$t = 0.999$	0.0010	0.0543	0.2635	0.0020	0.4131	0.0034

表 2　積コピュラとの比

コピュラ	正規	t	Clayton	Gumbel	Frank
$t = 0.8$	2.18	2.31	1.67	2.54	2.10
$t = 0.9$	3.24	3.84	1.82	4.60	2.60
$t = 0.95$	4.88	6.77	1.90	8.72	2.95
$t = 0.99$	12.94	28.77	1.98	41.73	3.32
$t = 0.995$	19.85	55.40	1.99	82.99	3.38
$t = 0.999$	54.26	263.49	2.00	413.07	3.42

積コピュラ以外のパラメータは Kendall の τ[注 1]が 1/3 になるように選択した．

定理 5.1 Clayton コピュラおよび Frank コピュラの裾依存度について次が成り立つ：

- Clayton コピュラについて，$\lambda^U(t) \sim (1+a)(1-t)\ (t \nearrow 1)$.
- Frank コピュラについて，$\lambda^U(t) \sim \dfrac{a}{1-e^{-a}}(1-t)\ (t \nearrow 1)$.

ここで，t の関数 $f(t), g(t)$ に対して $f(t)/g(t) \to 1\ (t \nearrow 1)$ であるとき $f(t) \sim g(t)\ (t \nearrow 1)$ と書く．

$\rho > 0$ の正規コピュラの場合には，上の数値例からも想像される通り極限値 $\lim_{t \nearrow 1} \dfrac{\lambda^U(t)}{1-t}$ は存在しない．より精密な評価として，我々は次の結果を得た：

定理 5.2 正規コピュラの裾依存度は $t \nearrow 1$ のとき漸近的に

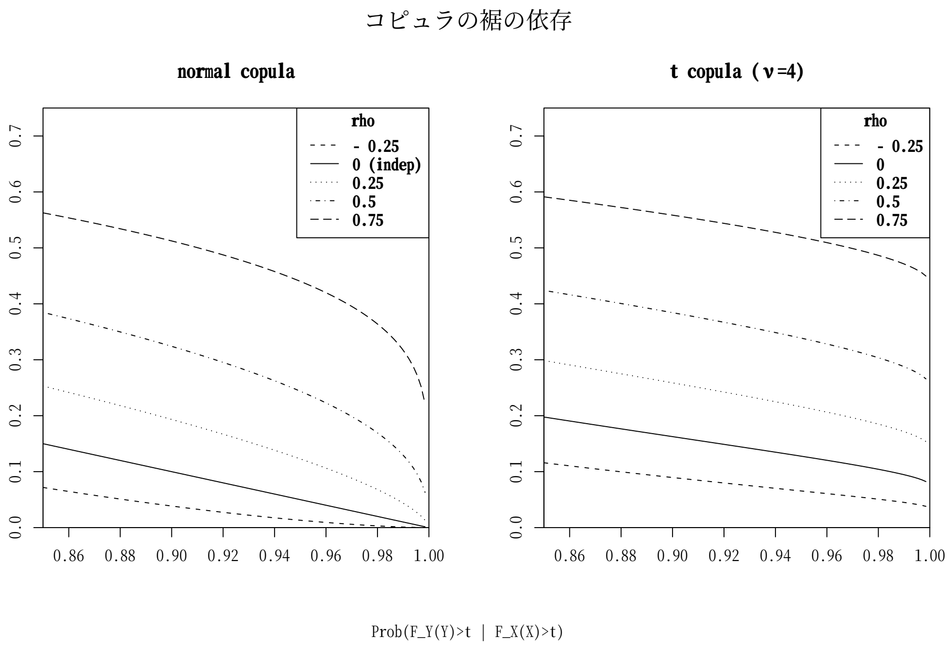
$$(4\pi)^{-\frac{\rho}{1+\rho}} \sqrt{\frac{(1+\rho)^3}{1-\rho}} (1-t)^{\frac{1-\rho}{1+\rho}} \big(-\log(1-t)\big)^{-\frac{\rho}{1+\rho}}$$

に等しい．ここで Φ は標準正規分布の分布関数である．

この定理から，正規コピュラの裾依存度は $t \nearrow 1$ のときにおよそ $\dfrac{1-\rho}{1+\rho}$ 次の漸近挙動を見せることが分かる．

注 1 Kendall の τ はコピュラから定まる依存性を表す 1 つの尺度である．詳しくは例えば [3] を参照.

注意 5.3 同様の結果は [1] にも言及されている．



6　考察

上記の結果から，多次元分布をコピュラによってモデリングする際に，裾依存係数が 0 であることのみをもって正規コピュラが裾依存性の反映に適さないとするのは早計であろうという結論に至った．

実績データからコピュラを推定するか，予め想定する性質を反映するべくコピュラを決定するかによっても違いは生じるが，考察対象とする有意水準（リスク計測における想定再現期間等）に応じてその確率における裾依存度を理論値と合致させるように選択するのが 1 つの代替手法として考えられる．

参考文献

[1] J. E. Heffernan, A directory of coefficients of tail dependence, *Extremes* **3** (2000), no. 3, 279–290.

[2] H. Kondo, S. Saito, S. Taniguchi, Asymptotic tail dependence of the normal copula, in preparation.

[3] R. B. Nelsen, *An introduction to copulas*, Second edition. Springer Series in Statistics. Springer, New York, 2006.