Bayes 推定による
パラメータリスク・モデルリスクの
評価に向けた一考察

近藤宏樹 [1]　　斎藤新悟 [2]

[1] 日新火災海上保険株式会社

[2] 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

2011/11/05

はじめに

確率分布を用いて将来予測を行う際に生じるリスクとは？

(1) プロセスリスク
求める値のランダム性に起因するリスク.

(2) パラメータリスク
パラメータの推定誤差に起因するリスク.

(3) モデルリスク
モデル（確率分布の種類）の選択誤りに起因するリスク.

一般的に，定量的な評価の難易度は

易 —(1)—(2)—(3)→ 難

Bayes 推定によるパラメータリスク

日新火災海上保険株式会社

Institute of Mathematics for Industry
Kyushu University

Bayes 推定の枠組み

- 尤度 $\Pr(x|\theta)$：求める値 X の分布（確率関数または確率密度関数）．
  確率変数 X がパラメータ θ の入った尤度 $\Pr(x|\theta)$ を持つ．
- 事前分布 $\Pr(\theta)$：パラメータ θ の分布．
  $\boldsymbol{\theta}$ **も確率変数**で事前分布 $\Pr(\theta)$ を持つ．
- 事後分布 $\Pr(\theta|\boldsymbol{x})$：データ $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ を踏まえた θ の分布．
  $x_1, \ldots, x_n$ は独立同分布とする．

パラメータリスクの計量手順

(1) 尤度 $\Pr(x|\theta)$，事前分布 $\Pr(\theta)$ の設定．
(2) データから事後分布 $\Pr(\theta|\boldsymbol{x})$ を算出．
(3) 事後分布に従うパラメータの下で X の変動性を求める．
$\longrightarrow$ パラメータリスクを含んだリスク計量．

事後分布の算出方法

尤度 $\Pr(x|\theta)$ + 事前分布 $\Pr(\theta) \longrightarrow$ 事後分布 $\Pr(\theta|\boldsymbol{x})$：

$$\Pr(\theta|\boldsymbol{x}) \propto \Pr(\theta) \prod_{i=1}^{n} \Pr(x_i|\theta).$$

（$\propto$ の意味：両辺の比が θ に依らない.）

計量の際の問題点

問題点 1：事後分布の計算は一般的には難しい.
（**比例定数**を計算する必要がある.）
問題点 2：**事前分布**を適切に選択する必要がある.

共役事前分布：問題点１の解決

尤度に応じて事前分布をうまく選ぶ（共役事前分布）.
$\longrightarrow$ 事後分布が事前分布と同じ種類の確率分布になる.
$\longrightarrow$ 事後分布の計算が容易.

例

尤度：Poisson 分布 $x \sim \mathrm{Po}(\lambda)$.

$$\Pr(x|\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad (x = 0, 1, 2, \ldots).$$

事前分布：ガンマ分布 $\lambda \sim \Gamma(\alpha, \beta)$.

$$\Pr(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} \quad (\lambda > 0).$$

$\longrightarrow$ 事後分布もガンマ分布：$\lambda|\boldsymbol{x} \sim \Gamma(\alpha + x_1 + \cdots + x_n, \beta + n)$.

Jeffreys 事前分布：問題点 2 の解決

定義

尤度 $\Pr(x|\theta)$ に対して，

$$\Pr(\theta) \propto \sqrt{I(\theta)}$$

で定まる事前分布を Jeffreys 事前分布という．

ここで，$I(\theta)$ は Fisher 情報量

$$I(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log\Pr(X|\theta)\right)^2\right].$$

注：パラメータが 2 個以上ある場合も Fisher 情報行列を用いて定義可能．

Jeffreys 事前分布の利点

- 尤度のみから定まる．
- パラメータの変換と両立する．

Jeffreys 事前分布の注意点

$\int \sqrt{I(\theta)}\, d\theta = \infty$ の場合は通常の確率分布ではない（変則事前分布）.

しかし，事後分布 $\Pr(\theta|\boldsymbol{x})$ が通常の確率分布になれば実用上は問題ない.

例

尤度：$x \sim \mathrm{Po}(\lambda)$.
Fisher 情報量：$I(\lambda) = \lambda^{-1}$.
Jeffreys 事前分布：$\Pr(\lambda) \propto \lambda^{-\frac{1}{2}}$.

$\int_0^\infty \lambda^{-\frac{1}{2}}\, d\lambda = \infty$ よりこれは変則事前分布で，$\Gamma\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ とみなせる.

事後分布：$\lambda|\boldsymbol{x} \sim \Gamma\left(\frac{1}{2} + x_1 + \cdots + x_n, n\right)$.

モデルリスク計量の枠組み

- モデル（確率分布の種類）の候補 $M = M_1, M_2, \ldots$.
- モデルの事前確率 $\Pr(M)$.
- 尤度 $\Pr(x|M, \theta)$（M はモデル，θ はパラメータ）.
- パラメータの事前分布 $\Pr(\theta|M)$（M はモデル）.

これらから，

- モデルの事後確率 $\Pr(M|\boldsymbol{x})$,
- パラメータの事後分布 $\Pr(\theta|M, \boldsymbol{x})$

を算出する．

$\longrightarrow$ モデルリスクを含んだリスク計量.

状況設定

- モデルの候補 N（正規分布），LN（対数正規分布）.
- モデルの事前確率 $\Pr(\mathrm{N}) = \Pr(\mathrm{LN}) = \frac{1}{2}$.
（正規分布と対数正規分布は対等.）
- パラメータ $\mu \in \mathbb{R}, \tau > 0$.
- 尤度

$$\Pr(x|\mathrm{N}, \mu, \tau) = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi}} \exp\left(-\frac{\tau(x-\mu)^2}{2}\right),$$

$$\Pr(x|\mathrm{LN}, \mu, \tau) = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi}} \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{\tau(\log x-\mu)^2}{2}\right).$$

- パラメータの事前分布は Jeffreys 事前分布とする.

日新火災海上保険株式会社
Institute of Mathematics for Industry
Kyushu University

事後分布の計算

Jeffreys 事前分布（変則事前分布）：

$$\Pr(\mu, \tau | \mathrm{N}) = \Pr(\mu, \tau | \mathrm{LN}) \propto \tau^{-\frac{1}{2}}$$

パラメータの事後分布：

$$\Pr(\mu, \tau | \mathrm{N}, \boldsymbol{x}) \propto \tau^{\frac{n-1}{2}} \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{\tau (x_i - \mu)^2}{2} \right),$$

$$\Pr(\mu, \tau | \mathrm{LN}, \boldsymbol{x}) \propto \tau^{\frac{n-1}{2}} \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{\tau (\log x_i - \mu)^2}{2} \right).$$

モデルの事後確率：

$$\Pr(\mathrm{N} | \boldsymbol{x}) : \Pr(\mathrm{LN} | \boldsymbol{x}) = \left(\mathrm{var}(\boldsymbol{x}) \right)^{-\frac{n}{2}} : \left(\mathrm{var}(\log \boldsymbol{x}) \right)^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i},$$

$$\Pr(\mathrm{N} | \boldsymbol{x}) + \Pr(\mathrm{LN} | \boldsymbol{x}) = 1.$$

モデルリスクの算出例

数値例

データ（ある保険種目の損害率を想定）：

$$\boldsymbol{x} = (33.5\%, 41.7\%, 37.4\%, 29.0\%, 31.0\%, 34.6\%, 42.2\%, 28.9\%, 23.0\%, 27.2\%).$$

算出結果：

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
期待値	32.8%	32.9%	32.8%	33.0%	32.9%
99%VaR	46.7%	49.5%	49.0%	53.1%	50.0%

(a) 正規分布を仮定，パラメータを固定（最尤法による推定値）．
(b) 対数正規分布を仮定，パラメータを固定（最尤法による推定値）．
(c) 正規分布を仮定，パラメータリスクを考慮.
(d) 対数正規分布を仮定，パラメータリスクを考慮.
(e) パラメータリスクおよびモデルリスクを考慮.

まとめ

上記の設定では，パラメータリスク・モデルリスクが計量可能.

異なる確率分布を使用する場合：

- パラメータリスク：○
  比較的多くの確率分布に適用可能.
- モデルリスク：△
  ここでのアプローチではモデルの事後確率が計算不能な場合が多い.