Bayes 推定によるパラメータリスク・モデルリスクの評価に向けた一考察

近藤宏樹（日新火災海上保険株式会社）
斎藤新悟（九州大学マス・フォア・インダストリ研究所）

1 はじめに

当研究成果は，著者らが日新火災海上保険株式会社と九州大学との共同研究に携わる中で得たものである．

将来予測に確率モデルを用いる状況においては，パラメータを含む確率分布を想定して実績データからパラメータを推定し，確率変数の実現値を予測することが一般的である．この際に生じるリスクは，求める値のランダム性に起因する**プロセスリスク** (process risk)，パラメータの推定誤差に起因する**パラメータリスク** (parameter risk)，モデルの選択の誤りに起因する**モデルリスク** (model risk) に分けて考えることができ，一般的にこの順に評価が難しくなっていく．

パラメータリスクやモデルリスクを評価するために有力であると考えられているものの一つに Bayes 推定がある．Bayes 推定は,

- 確率分布のパラメータそのものがある確率分布に従う確率変数であると考えるため，パラメータの推定誤差をパラメータの確率変動としてモデル化できる,
- 予め設定したパラメータの確率分布（**事前分布**）を標本データの情報によって変更する（**事後分布**）ことで，パラメータリスクの精度を高めることができる

といった特性をもっていることからパラメータリスクを効果的に計測できる可能性が期待されるが，一方で実際に応用する際にはいくつかの技術的な困難も伴う．

本論文では，正規分布または対数正規分布であると仮定した母集団分布を標本から推定するという状況において，プロセスリスク，パラメータリスク，モデルリスクをすべて考慮した Bayes 推定によるリスク評価の具体的な方法を提案する．この状況は，例えばある保険種目の損害率が正規分布または対数正規分布に従っているという仮定を置いた場合の推定に利用できると考えられる．

以下第 2 節では，モデルを固定した場合のパラメータリスクの計量について論じ，第 3 節でモデルリスクの計量方法を紹介した後，上記の具体的な状況におけるリスク評価方法を提示する．ここで紹介するモデルリスク計量の枠組みについては [1] を参照した．

なお，命題や定理の証明は省略したので，本論文の研究成果についての詳細は [3] を，また Bayes 推定の一般論は [2] を参照されたい．

2 パラメータリスク

2.1 Bayes 推定

以下では，確率関数または確率密度関数を Pr で表す．

Bayes 推定においては，分析の対象とする確率変数 X はパラメータ θ が未知であるような確率分布 $D(\theta)$ に従っていると考える．すなわち θ は確率変数であり，$X|\theta \sim D(\theta)$ を満たす．θ の従う確率分布を**事前分布** (prior distribution) といい，$D(\theta)$ の確率関数または確率密度関数 $\mathrm{Pr}(x|\theta)$ を**尤度** (lilelihood) という．

ここで，このような母集団からの独立な標本値 $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geqq 1)$ が与えられたとする．このとき，$\theta | x_1, \ldots, x_n$ の従う確率分布は得られた情報によって事前分布より信頼性の高いものとなっていると考えられ，これを**事後分布** (posterior distribution) という．

事後分布は

$$\Pr(\theta | x_1, \ldots, x_n) = \frac{\Pr(\theta, x_1, \ldots, x_n)}{\Pr(x_1, \ldots, x_n)},$$
$$\Pr(\theta, x_1, \ldots, x_n) = \Pr(\theta) \prod_{i=1}^{n} \Pr(x_i | \theta)$$

を用いることで，事前分布，$D(\theta)$ および $x_1, \ldots, x_n$ から具体的に計算することができる．ここで，θ に依存しない定数倍は事後分布の決定には影響しないため，両辺の比が θ に依存しないことを意味する次の表示を用いると便利である：

$$\Pr(\theta | x_1, \ldots, x_n) \propto \Pr(\theta) \prod_{i=1}^{n} \Pr(x_i | \theta).$$

Bayes 推定を用いたパラメータリスクの計量には次の方法が考えられる：

(i) 確率分布の種類，尤度および事前分布を設定する．
(ii) 標本データをもとに，事後分布を算出する．
(iii) パラメータが事後分布に従うという条件の下での分布を求める．その変動性がパラメータリスクを含んだリスクを表している．

注意 2.1 この方法においては，パラメータリスクを含んだリスクを計量しているが，プロセスリスクとパラメータリスクは明示的に区分されない．

2.2 共役事前分布

上記の方法を実際に応用する際には，次のような問題がある：

- 事前分布によっては，事後分布が簡単に計算できないこと，
- 事前分布の設定方法が明確でないこと．

このうち前者については，事前分布を尤度に応じてうまく選ぶことで事後分布が事前分布と同じ種類の確率分布になることがあり，このような事前分布を使うことで簡単に事後分布を求めることができる。このような事前分布を**共役事前分布** (conjugate prior distribution) という．

以下，標本値を $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ とし，事前分布の例をいくつか挙げる．

例 2.2 尤度がパラメータ $\lambda > 0$ をもつ Poisson 分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ のときを考える：

$$\Pr(x | \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad (x = 0, 1, 2, \ldots).$$

このとき，λ の事前分布をガンマ分布 $\mathrm{Gm}(\alpha, \beta)$ とする，つまり

$$\Pr(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha - 1} e^{-\beta \lambda} \quad (\lambda > 0)$$

とすると，$\lambda|\boldsymbol{x} \sim \mathrm{Gm}(\alpha + n\overline{x}, \beta + n)$ となるのでこれは共役事前分布である．ここで，$\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ である．

例 2.3 尤度がパラメータ $\beta > 0$ をもつガンマ分布 $\mathrm{Gm}(\alpha, \beta)$ のときを考える．ただし，パラメータ $\alpha > 0$ は既知の定数であるとする：

$$\Pr(x|\beta) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \quad (x > 0).$$

このとき，β の事前分布をガンマ分布 $\mathrm{Gm}(\alpha', \beta')$ とすると，$\beta|\boldsymbol{x} \sim \mathrm{Gm}(\alpha' + n\alpha, \beta' + n\overline{x})$ となるのでこれは共役事前分布である．

次に正規分布の例を扱うために，確率分布の族を定義する．

定義 2.4 $\alpha, \beta, \delta > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$ に対して，次の確率密度関数で定まる確率分布をガンマ正規分布と呼び $\mathrm{GmN}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ と書く：

$$\Pr(\mu, \tau) = \frac{1}{f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)} \tau^{\alpha - \frac{1}{2}} \exp(-\beta\tau) \exp\left(-\frac{\delta(\mu - \gamma)^2 \tau}{2}\right) \quad (\mu \in \mathbb{R}, \tau > 0).$$

ここで，

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \iint_{\mu \in \mathbb{R}, \tau > 0} \tau^{\alpha - \frac{1}{2}} \exp(-\beta\tau) \exp\left(-\frac{\delta(\mu - \gamma)^2 \tau}{2}\right) d\mu\, d\tau = \sqrt{\frac{2\pi}{\delta}} \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^{\alpha}}$$

である．

注意 2.5 上記の確率分布は，$\tau \sim \mathrm{Gm}(\alpha, \beta)$ かつ $\mu|\tau \sim N\left(\gamma, \dfrac{1}{\delta\tau}\right)$（平均 γ，分散 $\dfrac{1}{\delta\tau}$ の正規分布）を満たすものとなっている．

例 2.6 尤度がパラメータ $\mu \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$ をもつ正規分布 $N(\mu, \tau^{-1})$ のときを考える（分散の逆数をパラメータとしていることに注意）：

$$\Pr(x|\mu, \tau) = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi}} \exp\left(-\frac{\tau(x - \mu)^2}{2}\right) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

このとき，(μ, τ) の事前分布をガンマ正規分布 $\mathrm{GmN}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ とすると，

$$(\mu, \tau)|\boldsymbol{x} \sim \mathrm{GmN}\left(\alpha + \frac{n}{2}, \beta + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 + \frac{\delta n(\overline{x} - \gamma)}{2(\delta + n)}, \frac{\delta\gamma + n\overline{x}}{\delta + n}, \delta + n\right)$$

となるのでこれは共役事前分布である．

2.3 Jeffreys 事前分布

前小節の冒頭で触れた問題のうち後者については，共役事前分布を用いることでも解決できているとはいえない．これは，共役事前分布を用いることを決めたとしても，そのパラメータを決定する必要があることによる．

尤度のみから設定することのできる事前分布として，次の Jeffreys 事前分布がある：

定義 2.7 確率変数 X の確率関数または確率密度関数が m 次元パラメータ $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ を用いて $\Pr_\theta(x)$ と表されるとする．このとき，m 次正方行列

$$I(\theta) = \left(E\left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} \log \Pr_\theta(X) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta_j} \log \Pr_\theta(X) \right) \right] \right)_{i,j=1,\ldots,m}$$

を X の **Fisher 情報行列** (Fisher information matrix) と呼ぶ.

定義 2.8 尤度 $\Pr(x|\theta)$ に対して，Fisher 情報行列 $I(\theta)$ を用いて

$$\Pr(\theta) \propto \sqrt{\det I(\theta)}$$

で定まる事前分布 $\Pr(\theta)$ を **Jeffreys 事前分布** (Jeffreys prior distribution) という.

注意 2.9 一般には，標準化するための比例定数 $\displaystyle\int \sqrt{\det I(\theta)}\, d\theta$ が発散する可能性があり，この場合は通常の確率関数または確率密度関数として $\Pr(\theta)$ を定めることはできない．ただ，$\Pr(\theta|\boldsymbol{x}) \propto \Pr(\theta) \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \Pr(x_i|\theta)$ を用いて計算した事後分布が通常の意味での確率分布となれば実用上問題ない.
$\displaystyle\int \sqrt{\det I(\theta)}\, d\theta = \infty$ となる場合の事前分布を**変則事前分布** (improper prior distribution) と呼ぶ.

Jeffreys 事前分布を採用する動機付けの一つとして，パラメータの変換と両立することが挙げられる．これは，尤度のパラメータのとり方を変えても Jeffreys 事前分布は同等のものが得られることを意味する．正確に述べると次のようになる：

命題 2.10 尤度の 2 通りのパラメータ表示 $\Pr(x|\theta)$, $\Pr(x|\lambda)$ に対して，θ, λ の Jeffreys 事前分布をそれぞれ $\Pr(\theta)$, $\Pr(\lambda)$ とし，λ から θ へのパラメータ変換の Jacobi 行列を J とすると次が成り立つ：

$$\Pr(\lambda) = \Pr(\theta) |\det J|.$$

Jeffreys 事前分布の例を挙げる.

例 2.11 尤度がパラメータ $\lambda > 0$ をもつ Poisson 分布 $\Pr(x|\lambda) = \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ $(x = 0, 1, 2, \ldots)$ のとき，Fisher 情報行列は

$$I(\lambda) = \frac{1}{\lambda},$$

これより Jeffreys 事前分布は

$$\Pr(\lambda) \propto \lambda^{-\frac{1}{2}}$$

となる．これは変則事前分布であるが，形式的に $\mathrm{Gm}\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ と見なせる．事後分布は

$$\lambda|\boldsymbol{x} \sim \mathrm{Gm}\left(\frac{1}{2} + n\overline{x}, n\right)$$

となる（例 2.2 参照）.

例 2.12 尤度がパラメータ $\alpha > 0$, $\beta > 0$ をもつガンマ分布 $\Pr(x|\alpha,\beta) = \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$ $(x > 0)$ のとき，Fisher 情報行列は

$$I(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \psi'(\alpha) & -\dfrac{1}{\beta} \\ -\dfrac{1}{\beta} & \dfrac{\alpha}{\beta^2} \end{pmatrix}$$

である．ここで $\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ はディガンマ関数である．これより Jeffreys 事前分布は

$$\Pr(\alpha,\beta) \propto \frac{\sqrt{\alpha\psi'(\alpha) - 1}}{\beta}$$

となる．これは変則事前分布であり，事後分布は

$$\Pr(\alpha,\beta|\boldsymbol{x}) \propto \frac{\sqrt{\alpha\psi'(\alpha) - 1}}{\Gamma(\alpha)^n} e^{(\alpha-1)n\overline{\log x}} \beta^{\alpha n - 1} e^{-\beta n \overline{x}}$$

となる．ここで，$\overline{\log x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \log x_i$ である．

例 2.13 尤度がパラメータ $\mu \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$ をもつ正規分布 $\Pr(x|\mu,\tau) = \sqrt{\dfrac{\tau}{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{\tau(x-\mu)^2}{2}\right)$ $(x \in \mathbb{R})$ のとき，Fisher 情報行列は

$$I(\mu,\tau) = \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2\tau^2} \end{pmatrix},$$

これより Jeffreys 事前分布は

$$\Pr(\mu,\tau) \propto \tau^{-\frac{1}{2}}$$

となる．これは変則事前分布であるが，形式的に $\mathrm{GmN}(0,0,0,0)$ と見なせる．事後分布は

$$(\mu,\tau)|\boldsymbol{x} \sim \mathrm{GmN}\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2, \overline{x}, n\right)$$

となる（例 2.6 参照）．

例 2.14 尤度がパラメータ $\mu \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$ をもつ対数正規分布 $\Pr(x|\mu,\tau) = \sqrt{\dfrac{\tau}{2\pi}} \dfrac{1}{x} \exp\left(-\dfrac{\tau(\log x - \mu)^2}{2}\right)$ $(x > 0)$ のとき，標本値 $x_1,\ldots,x_n$ を $\log x_1,\ldots,\log x_n$ に置き換えることで，尤度が正規分布の場合に帰着することができる．したがって，Jeffreys 事前分布は

$$\Pr(\mu,\tau) \propto \tau^{-\frac{1}{2}}$$

となり，この場合の事後分布は

$$(\mu,\tau)|\boldsymbol{x} \sim \mathrm{GmN}\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\log x_i - \overline{\log x})^2, \overline{\log x}, n\right)$$

となる．

3 モデルリスク

3.1 推定の枠組み

ここでは，[1] で提案されているモデルリスク推定の枠組みを紹介する．

モデルリスクを含めた推定を行うため，**モデル** (model) の集合を $\mathcal{M}$ とする．ここでは，各モデルは一種類の確率分布を表していると考え，また $\mathcal{M}$ は高々可算であるとする．$\mathcal{M}$ には事前分布として確率関数 $\Pr(M)$ $(M \in \mathcal{M})$ が定まっているとする．

各モデル $M \in \mathcal{M}$ で条件付けると，前節で議論したパラメータリスク推定の枠組みが得られるとする．すなわち，各モデル $M \in \mathcal{M}$ には確率分布の種類に応じた**パラメータ空間** (parameter space)Θ_M が付随しており，Θ_M には事前分布 $\Pr(\theta|M)$ が定まっている．モデルおよびパラメータで条件付けた標本値 x は尤度 $\Pr(x|M,\theta)$ をもつ．

このとき，モデルで条件付けた標本値の確率分布が

$$\Pr(x|M) = \int_{\Theta_M} \Pr(\theta|M)\Pr(x|M,\theta)\,d\theta$$

で求められることに注意すると，標本値 $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ が与えられたときの $\mathcal{M}$ の事後分布は

$$\Pr(M|\boldsymbol{x}) = \frac{\Pr(M)\Pr(\boldsymbol{x}|M)}{\sum_{M'\in\mathcal{M}}\Pr(M')\Pr(\boldsymbol{x}|M')}$$

で与えられる．

このような状況で，モデルリスクを次のように計量することができると考えられる：

(i) 確率分布の種類の候補，尤度および事前分布を設定する．
(ii) 標本データをもとに，モデルの事後分布 $\Pr(M|\boldsymbol{x})$ およびモデルで条件付けたパラメータの事後分布 $\Pr(\theta|M,\boldsymbol{x})$ を算出する．
(iii) モデルおよびパラメータが事後分布に従うという条件の下での分布を求める．その変動性がモデルリスク，パラメータリスクを含んだリスクを表している．

注意 3.1 注意 2.1 と同様に，この方法においては，モデルリスクとパラメータリスクを含んだリスクを計量しているが，プロセスリスク，パラメータリスク，モデルリスクは明示的に区分されない．

3.2 事例：正規分布と対数正規分布の選択

ここでは，上記のモデルリスク計量の枠組みを用いて，確率分布に正規分布または対数正規分布を仮定した場合の両者の選択によって生じるモデルリスクを計算する．

$\mathcal{M} = \{\mathrm{norm}, \mathrm{lnorm}\}$ をモデルの集合とし，$\mathcal{M}$ 上の事前分布が

$$\Pr(\mathrm{norm}) = \Pr(\mathrm{lnorm}) = \frac{1}{2}$$

で与えられているものとする．これは，情報がない状態を想定して正規分布と対数正規分布を同等に扱っていることに相当する．

また，$\Theta = \{(\mu,\tau) \mid \mu \in \mathbb{R}, \tau > 0\}$ をパラメータ空間とし，モデル及びパラメータで条件付けた標本値 x の分布は

$$\Pr(x|\mathrm{norm},\mu,\tau) = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi}}\exp\biggl(-\frac{\tau(x-\mu)^2}{2}\biggr),$$
$$\Pr(x|\mathrm{lnorm},\mu,\tau) = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi}}\frac{1}{x}\exp\biggl(-\frac{\tau(\log x-\mu)^2}{2}\biggr)$$

で与えられるものとする．

norm または lnorm で条件付けた Θ 上の事前分布については，それぞれ Jeffreys 事前分布を用いることとする．例 2.13 および例 2.14 により，これらの Jeffreys 事前分布は

$$\Pr(\mu,\tau|\mathrm{norm}) = \Pr(\mu,\tau|\mathrm{lnorm}) \propto \tau^{-\frac{1}{2}}$$

で与えられ，これは変則事前分布である．事後分布についても例 2.13 および例 2.14 より

$$(\mu,\tau)|\mathrm{norm},\boldsymbol{x} \sim \mathrm{GmN}\biggl(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2,\overline{x},n\biggr),$$
$$(\mu,\tau)|\mathrm{lnorm},\boldsymbol{x} \sim \mathrm{GmN}\biggl(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\log x_i-\overline{\log x})^2,\overline{\log x},n\biggr)$$

と求まる．

モデルの事後確率については，次が示される：

定理 3.2 $\mathcal{M} = \{\mathrm{norm},\mathrm{lnorm}\}$ 上の事後確率は次で与えられる（$\Pr(\mathrm{norm}|\boldsymbol{x}) + \Pr(\mathrm{lnorm}|\boldsymbol{x}) = 1$ となることに注意）：

$$\Pr(\mathrm{norm}|\boldsymbol{x}) = \frac{\bigl(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\bigr)^{-\frac{n}{2}}}{\bigl(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\bigr)^{-\frac{n}{2}} + \bigl(\sum_{i=1}^{n}(\log x_i-\overline{\log x})^2\bigr)^{-\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}},$$
$$\Pr(\mathrm{lnorm}|\boldsymbol{x}) = \frac{\bigl(\sum_{i=1}^{n}(\log x_i-\overline{\log x})^2\bigr)^{-\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}{\bigl(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\bigr)^{-\frac{n}{2}} + \bigl(\sum_{i=1}^{n}(\log x_i-\overline{\log x})^2\bigr)^{-\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}.$$

3.3 数値例

上記の事例について，具体的な数値を用いた計算を例示する．標本値 $\boldsymbol{x}$ として，ある保険種目における 10 年分の実績損害率を想定した表 1 の 2 通りのデータを用意し，次の設定でリスク評価を行う：

(a) 正規分布を仮定し，パラメータを最尤法による推定値で固定した場合.
(b) 対数正規分布を仮定し，パラメータを最尤法による推定値で固定した場合.
(c) 正規分布を仮定し，パラメータリスクを考慮した場合.
(d) 対数正規分布を仮定し，パラメータリスクを考慮した場合.
(e) 正規分布または対数正規分布を仮定し，パラメータリスクおよびモデルリスクを考慮した場合.

表 1　元データ

年度	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
種目 1	52.8%	54.3%	54.8%	52.2%	51.7%	51.5%	52.4%	50.6%	52.2%	50.4%
種目 2	33.5%	41.7%	37.4%	29.0%	31.0%	34.6%	42.2%	28.9%	23.0%	27.2%

表 2　期待値

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
種目 1	52.3%	52.3%	52.3%	52.3%	52.3%
種目 2	32.8%	32.9%	32.8%	33.0%	32.9%

表 3　VaR(99%) および T-VaR(95%)

	VaR					T-VaR				
	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
種目 1	55.4%	55.5%	55.9%	56.0%	56.0%	55.1%	55.1%	55.5%	55.5%	55.5%
種目 2	46.7%	49.5%	49.0%	53.1%	50.0%	45.1%	47.3%	46.9%	50.2%	47.8%

表 4　VaR(99%) および T-VaR(95%)（期待値控除）

	VaR					T-VaR				
	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
種目 1	3.1%	3.2%	3.6%	3.7%	3.7%	2.8%	2.8%	3.2%	3.3%	3.2%
種目 2	13.9%	16.7%	16.1%	20.1%	17.2%	12.3%	14.4%	14.1%	17.2%	14.9%

それぞれの場合に，99% VaR（バリューアットリスク，確率分布の 99% 分位点）および 95% T-VaR（テイルバリューアットリスク，95% VaR 以上で条件付けた期待値）によるリスク計量結果は表 2〜表 4 の通りである．なお，事後分布の統計量は 1,000,000 回のモンテカルロシミュレーションにより近似的に算出し，計算プログラムには R を用いている．

計算結果を見ると，いずれの設定でも期待値に大きな差はないが，同種類の確率分布の場合はパラメータリスクを考慮すると VaR や T-VaR が大きくなっていることが分かる．一方で，モデルリスクを考慮した VaR や T-VaR は考慮していない場合より大きくなるとはいえず，パラメータリスクのみを考慮した正規分布および対数正規分布の場合の間をとる傾向が見てとれる．

4　まとめ

以上で紹介したような具体的な状況を想定すると，パラメータリスクおよびモデルリスクを含んだリスク計量を比較的簡単な手続で行えることが分かった．

しかしながら，より一般的な状況においては，Jeffreys 事前分布を使用するとモデルの事後確率が多くの場合に有限確定値として定まらないことが知られており，以上の方法をそのまま一般化することはできない．これは，変則分布になり得る Jeffreys 事前分布を使用することで生じる弊害であるが，Jeffreys 事前分布を採用

しないことにすると，妥当な事前分布を設定する方法を別途考えなければならない．この際，事前分布によっては事後分布の算出が困難になることも考慮する必要があり，汎用性のあるパラメータリスク・モデルリスクの評価に向けては課題が多い．

参考文献

[1] Andrew J. G. Cairns, A discussion of parameter and model uncertainty in insurance, *Insurance: Mathematics and Economics*, **27** (2000), 313–330.

[2] Andrew Gelman, John B. Carlin, Hal S. Stern, and Donald B. Rubin, *Bayesian data analysis*, Second edition, Texts in Statistical Science Series, Chapman & Hall/CRC, 2004.

[3] Hiroki Kondo and Shingo Saito, Bayesian approach to measuring model and parameter risk in population distribution estimation, in preparation.