Wang 変換による保険料算出原理と Hermite 多項式

近藤宏樹 [1]　斎藤新悟 [2]

[1] 日新火災海上保険株式会社

[2] 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

2012/11/10

谷口説男氏（九州大学大学院数理学研究院）との共同研究.

保険料算出原理

保険料算出原理：将来の保険金に対して保険料を対応させる規則.
将来の保険金は確率変数で表されるので，数学的には

定義

保険料算出原理とは，確率変数の集合 $\mathcal{X}$ から $\mathbb{R}$ への写像 $\pi\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$.

例

- **期待値原理**：$\pi(X) = E[X]$.
- **標準偏差原理**：$\pi(X) = E[X] + h\sigma(X)$ $(h > 0)$.

リスクプレミアム $= \pi(X) - E[X]$：保険金の不確実性の対価.

Wang 変換による保険料算出原理

日新火災海上保険株式会社
Institute of Mathematics for Industry
Kyushu University

確率変数 X の分布関数を F_X と書く：$F_X(x) = P(X \leq x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

定義

h : 0 以上の定数.
確率変数 X の **Wang 変換** $W_{X,h}$ とは

$$F_{W_{X,h}}(x) = \Phi\big(\Phi^{-1}(F_X(x)) - h\big) \quad (x \in \mathbb{R})$$

なる確率変数（Φ : 標準正規分布の分布関数）.
これを用いた保険料算出原理を次で定める：

$$\pi(X,h) = E[W_{X,h}].$$

$\pi(X,h)$ は次で計算できる：

$$\pi(X,h) = \int_0^\infty (1 - F_{W_{X,h}}(x))\,dx - \int_{-\infty}^0 F_{W_{X,h}}(x)\,dx.$$

例

- **正規分布**：$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき

$$W_{X,h} \sim N(\mu + h\sigma, \sigma^2), \quad \pi(X,h) = \mu + h\sigma.$$

- **対数正規分布**：$X \sim LN(\mu, \sigma^2)$（つまり $\log X \sim N(\mu, \sigma^2)$）のとき

$$W_{X,h} \sim LN(\mu + h\sigma, \sigma^2), \quad \pi(X,h) = \exp\left(\mu + h\sigma + \frac{\sigma^2}{2}\right).$$

- **一様分布**：$X \sim U(a,b)$ のとき

$$\pi(X,h) = a + (b-a)\Phi\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right).$$

基本的な性質

日新火災海上保険株式会社
Institute of Mathematics for Industry
Kyushu University

命題

$h \geqq 0$ を固定したとき，$\pi(X) = \pi(X, h)$ は次を満たす：

- 定数 c に対して $\pi(c) = c$.
- π は**リスク尺度**：
  - **単調性**：$X \leqq Y$ ならば $\pi(X) \leqq \pi(Y)$.
  - **平行移動不変性**：定数 c に対して $\pi(X + c) = \pi(X) + c$.
- π は**コヒーレント**である：
  - **正の同次性**：定数 $c \geqq 0$ に対して $\pi(cX) = c\pi(X)$.
  - **凸性**：定数 $\lambda \in [0, 1]$ に対して

$$\pi((1 - \lambda)X + \lambda Y) \leqq (1 - \lambda)\pi(X) + \lambda\pi(Y).$$

  - **劣加法性**：$\pi(X + Y) \leqq \pi(X) + \pi(Y)$.

さらに，$\pi(X, h)$ は h について単調増加で $\pi(X, 0) = E[X]$.
よって $\pi(X, h) \geqq E[X]$（**リスクプレミアムは非負**）.

過去データからの保険料計算

$x_1, \ldots, x_n$ $(x_1 \leqq \cdots \leqq x_n)$：保険金の過去データ．
この経験分布を X の分布と考えると，

命題

$$\pi(X,h) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\Phi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{i}{n}\right) - h \right) - \Phi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{i-1}{n}\right) - h \right) \right).$$

```
# 関数"wang"の定義
wang = function(x,h){
 n = length(x)
 phi = outer(0:n,h,function(i,k){pnorm(qnorm(i/n)-k)})
 return(as.vector(sort(x) %*% diff(phi)))
}
# 使用例
x=c(2,4,6,0,0,3,2,0,5)
wang(x,h=c(0,1,2))  # h=0, 1, 2の結果が出力される
```

数値例

- 契約件数：100,000 件.
- 事故頻度：1%（事故件数：1,000 件）.
- 保険金：対数正規分布 $LN(10, 4)$.
- データ全体では平均 1,542，標準偏差 69,096.

h	0	0.001	0.005	0.01	0.02
保険料	1,542	1,547	1,569	1,597	1,654
リスクプレミアム	0%	0.4%	1.8%	3.6%	7.2%
h	0.05	0.1	0.2	0.5	1
保険料	1,836	2,181	3,063	8,131	36,003
リスクプレミアム	19%	41%	99%	427%	2235%

h は 0 に近い値を適用することが現実的.
$\longrightarrow \pi(X, h)$ の $h = 0$ 付近での振る舞いを調べる.
$\longrightarrow \pi(X, h)$ を **Maclaurin 展開**.

Maclaurin 展開の準備

$\pi(X,h)$ の Maclaurin 展開には **Hermite 多項式**が現れる.

定義

整数 $n \geqq 0$ に対して **Hermite 多項式** $H_n(z)$ を次で定義：

$$H_n(z) = (-1)^n e^{\frac{z^2}{2}} \frac{d^n}{dz^n} e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

例

$H_0(z) = 1,\ H_1(z) = z,\ H_2(z) = z^2 - 1.$

$\{H_n(z)\}_{n\geqq 0}$ は $\mathbb{R}$ 上の $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ を重みとする**完全直交関数系**：

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(z) H_n(z) \varphi(z)\, dz = \begin{cases} n! & (m = n), \\ 0 & (m \neq n). \end{cases}$$

$\pi(X,h)$ の Maclaurin 展開

日新火災海上保険株式会社

Institute of Mathematics for Industry
Kyushu University

定理

$g = F_X^{-1} \circ \Phi$ とおき,

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} g(z) H_n(z) \varphi(z)\, dz \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

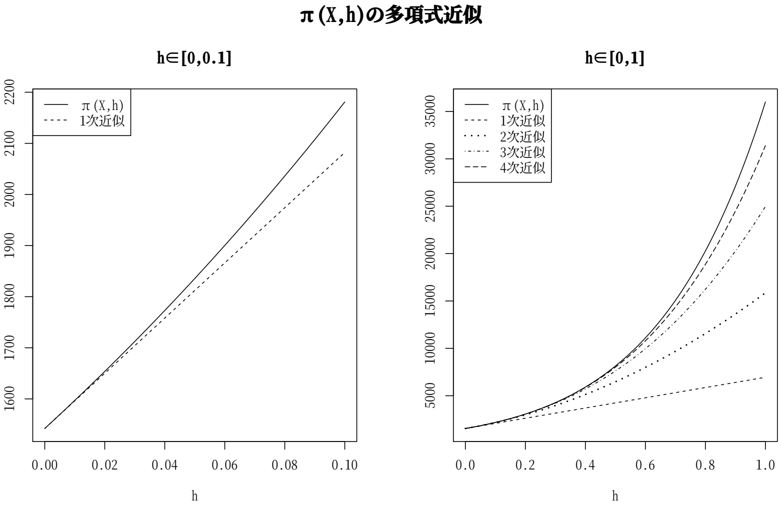
とおくと,

$$\pi(X,h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} h^n.$$

$Z \sim N(0,1)$ ならば $g(Z)$ は X と同分布.
$a_n = E[g(Z)H_n(Z)] = E[XH_n(Z)]$（$X$ と Z は**共単調**）.

- $a_0 = E[X]$.
- $a_1 = E[XZ] = \mathrm{Cov}(X,Z)$ より $0 \leqq a_1 \leqq \sigma(X)$ $(E[Z] = 0,\ V(Z) = 1)$.

多項式近似の様子



π(X,h)の多項式近似
h∈[0,0.1]
π(X,h)
1次近似
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
h
1600
1700
1800
1900
2000
2100
2200
h∈[0,1]
π(X,h)
1次近似
2次近似
3次近似
4次近似
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
h
5000
10000
15000
20000
25000
30000
35000

日新火災海上保険株式会社
Institute of Mathematics for Industry
Kyushu University

- Wang 変換による保険料 $\pi(X,h)$ は **Hermite 多項式**を用いて **Maclaurin 展開**できる.
  $\longrightarrow$ h が 0 に近いときは $\pi(X,h)$ を**多項式で近似**できる.
- $\pi(X,h)$ は h の値によって大きく変化（0 に近い値が適当）.
  $\longrightarrow$ 実務上は ***h* の設定方法**が課題.
  $\longrightarrow$ 多項式近似は h の調整に役立つと考えられる.