Wang 変換による保険料算出原理と Hermite 多項式

近藤宏樹（日新火災海上保険株式会社）
斎藤新悟（九州大学マス・フォア・インダストリ研究所）

1　はじめに

当研究成果は，著者らが日新火災海上保険株式会社と九州大学との共同研究に携わる中で谷口説男氏（九州大学大学院数理学研究院）と共同で得たものである．

保険商品の保険料は，将来の保険金支払の原資にあたる純保険料と保険会社の経費等に対応する付加保険料からなり，純保険料は将来の保険金の期待値として算出されるのが一般的である．これは，多数の保険契約を考えると，平均的な保険金支出は大数の法則により期待値と同程度になると考えられており，また期待値からの超過分は付加保険料に織り込まれる予定利潤や保険金の期待値をやや高めに推定することである程度吸収されるためである．

一方で，将来の保険金の確率的な変動の大きさを保険料に反映させるという考え方もできる．保険金の従う確率分布から保険料を算出する方法を保険料算出原理と呼び，様々な性質を持つ保険料算出原理が提案されてきている．本稿では，このうち Wang 変換を用いた保険料算出原理について考察する．

Wang 変換を用いた保険料算出原理を実際に使用するためには，分布関数の移動量を表すパラメータ h を予め設定しておく必要があるが，パラメータの設定方法は明らかではない．そこで，パラメータ h に関する保険料の挙動を調べることが本稿の主目的である．

以下，第 2 節で Wang 変換を用いた保険料算出原理を概観した後，第 3 節で数値例を交えた保険料の計算を行う．ここでの数値例で，実際の保険料算出に用いるためにはパラメータ h をごく小さく設定することが適切であると推察されることから，第 4 節では保険料の h に関する Maclaurin 展開について考察する．結果として，Maclaurin 展開の係数が古典的な直交多項式である Hermite 多項式を用いて簡潔に表せることを示す．

2　Wang 変換による保険料算出原理

2.1　保険料算出原理

保険料算出原理 (premium calculation principle) とは，保険契約に対して想定される将来の保険金に応じた保険料を算出する規則を指す．将来の保険金は確率変数で表されると考えられるため，次のように定義する：

定義 2.1 確率変数からなる集合 $\mathcal{X}$ から実数全体の集合 $\mathbb{R}$ への写像 $\pi\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ を**保険料算出原理**という．

注意 2.2 π の定義域 $\mathcal{X}$ は，$\pi(X) \in \mathbb{R}$ $(X \in \mathcal{X})$ が定義できるように適当に定めるものとする．

例 2.3 確率変数 X に対してその期待値を対応させる：$\pi(X) = E[X]$．これを**期待値原理** (expectation principle) という．

一般的に，保険会社が受け取る保険料は，保険金の不確実性に見合う金額を保険金の期待値に加えたものと考えるのが自然である．

定義 2.4 保険料算出原理 π と確率変数 X に対し，$\pi(X) - E[X]$ を**リスクプレミアム** (risk premium) という．

例 2.5 $V(X)$ で確率変数 X の分散を表す．$h > 0$ を定数とし，$\pi(X) = E[X] + h\sqrt{V(X)}$ で定まる保険料算出原理を**標準偏差原理** (standard deviation principle) という．このとき，リスクプレミアムは $h\sqrt{V(X)} \geqq 0$ となる．

2.2 Wang 変換による保険料算出原理

Wang [1] は，Wang 変換と呼ばれる変換を用いた保険料算出原理を提案した．

確率変数 X の分布関数を F_X と書く：$F_X(x) = P(X \leqq x)$．φ, Φ をそれぞれ標準正規分布 $N(0,1)$ の確率密度関数，分布関数とする：

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)\,dy \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

注意 2.6 $\Phi(-\infty) = 0$, $\Phi(\infty) = 1$ と定める．これにより Φ は $[-\infty, \infty]$ から $[0,1]$ への全単射となる．

定義 2.7 h を 0 以上の実数とする．確率変数 X に対して，

$$F_{W_{X,h}}(x) = \Phi\bigl(\Phi^{-1}(F_X(x)) - h\bigr) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

を分布関数に持つ確率変数 $W_{X,h}$ を X の **Wang 変換** (Wang transform) と呼び，X にその期待値 $\pi(X,h) = E[W_{X,h}]$ を対応させる写像を Wang 変換による保険料算出原理と呼ぶ．

注意 2.8 h を固定したとき，$\pi(X,h)$ は X の分布のみから定まる．これを満たす保険料算出原理は**法則不変** (law invariant) であるという．具体的には，分布関数を用いて次のように表せる：

$$\pi(X,h) = \int_0^{\infty} (1 - F_{W_{X,h}}(x))\,dx - \int_{-\infty}^{0} F_{W_{X,h}}(x)\,dx.$$

2.3 基本的な性質

Wang 変換による保険料算出原理の性質を挙げる．以下本稿を通して，$\pi(X,h)$ で Wang 変換による保険料算出原理を表す．

命題 2.9 $h \geqq 0$ を固定したとき，Wang 変換による保険料算出原理 $\pi(X) = \pi(X,h)$ は次を満たす：

(i) 定数 c に対して $\pi(c) = c$.
(ii) $X \leqq Y$ ならば，$\pi(X) \leqq \pi(Y)$（**単調性**）.
(iii) 定数 c に対して $\pi(X+c) = \pi(X) + c$（**平行移動不変性**）.
(iv) 定数 $c \geqq 0$ に対して $\pi(cX) = c\pi(X)$（**正の同次性**）.
(v) 定数 $\lambda \in [0,1]$ に対して $\pi((1-\lambda)X + \lambda Y) \leqq (1-\lambda)\pi(X) + \lambda\pi(Y)$（**凸性**）.
(vi) $\pi(X+Y) \leqq \pi(X) + \pi(Y)$（**劣加法性**）.
(vii) $\pi(X,h) \geqq E[X]$（リスクプレミアムは非負）.

上記の性質のうち，単調性及び平行移動不変性を満たす保険料算出原理を**リスク尺度** (risk measure) と呼び ([2])，さらに正の同次性，凸性及び劣加法性を満たすとき**コヒーレント** (coherent) であるという．これらは保険料算出原理が満たすべき性質として挙げられることが多く，Wang 変換による保険料算出原理が提案される一つの根拠となっている.

パラメータ h に関しては次のような基本的な性質がある：

命題 2.10 $\pi(X,h)$ は h について単調増加であり，$\pi(X,0) = E[X]$ が成り立つ.

3 計算例

Wang 変換による保険料算出原理の計算例を挙げる.

3.1 解析的に計算可能な例

いくつかの確率分布の族に対しては，$\pi(X,h)$ を解析的に計算することができる．ここでは，X が次の確率分布に従う場合に計算する：

- 正規分布,
- 対数正規分布,
- 一様分布.

まず次の事実に注意する：

命題 3.1 広義単調増加関数 ψ に対して，$W_{\psi(X),h}$ と $\psi(W_{X,h})$ は同分布である．特に $\pi(\psi(X),h) = E[\psi(W_{X,h})]$ が成り立つ.

証明 簡単のため，ψ が逆関数を持つ場合に示す．$W_{\psi(X),h}$ の定義より，$x \in \mathbb{R}$ に対して

$$F_{\psi(W_{X,h})}(x) = \Phi\big(\Phi^{-1}(F_{\psi(X)}(x)) - h\big)$$

を示せばよい．$W_{X,h}$ の定義より

$$F_{W_{X,h}}(\psi^{-1}(x)) = \Phi\big(\Phi^{-1}\big(F_X(\psi^{-1}(x))\big) - h\big)$$

なので，一般に確率変数 Y に対して $F_{\psi(Y)}(x) = F_Y(\psi^{-1}(x))$ であることから主張が従う． ∎

系 3.2 非負実数 a, 実数 b に対して $W_{aX+b,h}$ と $aW_{X,h}+b$ は同分布であり，$\pi(aX+b,h) = a\pi(X,h)+b$ が成り立つ．

Wang 変換の定義から，保険金が正規分布に従う場合は簡単に保険料を計算できる：

命題 3.3 X が正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ $(\sigma > 0)$ に従うとき，$W_{X,h} \sim N(\mu+h\sigma,\sigma^2)$, $\pi(X,h) = \mu+h\sigma$ が成り立つ．

証明 N を標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数とする．このとき $F_N = \Phi$ なので，

$$F_{W_{N,h}}(x) = \Phi\bigl(\Phi^{-1}(F_N(x)) - h\bigr) = \Phi(x-h)$$

より $W_{N,h} \sim N(h,1)$, $\pi(N,h) = h$ となる．

X は $\mu+\sigma N$ と同分布なので，系 3.2 より $W_{X,h}$ は $\mu+\sigma W_{N,h} \sim N(\mu+h\sigma,\sigma^2)$ と同分布となり，$\pi(X,h) = E[W_{X,h}] = \mu+h\sigma$ となる． ∎

対数正規分布の場合は，正規分布の変換と見ることで計算することができる．$\log X$ が $N(\mu,\sigma^2)$ に従うような X の分布を $LN(\mu,\sigma^2)$ と書く．このとき $E[X] = \exp\left(\mu+\dfrac{\sigma^2}{2}\right)$ となることに注意する．

命題 3.4 X が対数正規分布 $LN(\mu,\sigma^2)$ $(\sigma > 0)$ に従うとき，$W_{X,h} \sim LN(\mu+h\sigma,\sigma^2)$, $\pi(X,h) = \exp\left(\mu+h\sigma+\dfrac{\sigma^2}{2}\right)$ が成り立つ．

証明 $\log X \sim N(\mu,\sigma^2)$ なので，命題 3.1，命題 3.3 より $\log W_{X,h}$ は $W_{\log X,h} \sim N(\mu+h\sigma,\sigma^2)$ と同分布となり，$W_{X,h} \sim LN(\mu+h\sigma,\sigma^2)$, $\pi(X,h) = E[W_{X,h}] = \exp\left(\mu+h\sigma+\dfrac{\sigma^2}{2}\right)$ となる． ∎

次に一様分布の場合を考える．次の補題を用意する：

補題 3.5 定数 a, b に対して次が成り立つ：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(a+bx)\varphi(x)\,dx = \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{1+b^2}}\right).$$

証明 $a \to -\infty$ とすると両辺は 0 に収束するので，両辺の a での偏微分が等しいことを示せばよい．一般に，$\sigma_1, \sigma_2 > 0$ に対して，$N(0,\sigma_1^2)$, $N(0,\sigma_2^2)$ に対する正規分布の再生性より

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1}\varphi\left(\frac{x+x_0}{\sigma_1}\right)\frac{1}{\sigma_2}\varphi\left(\frac{x}{\sigma_2}\right)dx = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\varphi\left(\frac{x_0}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right) \qquad (x_0 \in \mathbb{R})$$

が成り立つことに注意して，これを $\sigma_1 = \dfrac{1}{b}$, $\sigma_2 = 1$, $x_0 = \dfrac{a}{b}$ に適用することで，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(a+bx)\varphi(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(a+bx)\varphi(x)\,dx = \frac{1}{b}\frac{1}{\sqrt{1/b^2+1}}\varphi\left(\frac{a/b}{\sqrt{1/b^2+1}}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\varphi\left(\frac{a}{\sqrt{1+b^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial a}\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{1+b^2}}\right)\end{aligned}$$

となり示すべき等式が得られた． ∎

$a < b$ に対し，(a, b) 上の一様分布を $U(a, b)$ と書く．一様分布の Wang 変換は簡単な形では表せないが，その期待値すなわち Wang 変換による保険料は簡単に書くことができる：

命題 3.6 X が一様分布 $U(a, b)$ $(a < b)$ に従うとき，$\pi(X, h) = a + (b-a)\Phi\left(\dfrac{h}{\sqrt{2}}\right)$ が成り立つ．

証明 系 3.2 より，$a = 0$, $b = 1$ の場合に示せばよい．N を標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数とすると，$\Phi(N) \sim U(0, 1)$ となるので，命題 3.1 と命題 3.3 より

$$\pi(X, h) = \pi(\Phi(N), h) = E[\Phi(W_{N,h})] = \int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)\varphi(x-h)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x+h)\varphi(x)\,dx$$

が成り立つ．前補題よりこの右辺は $\Phi\left(\dfrac{h}{\sqrt{2}}\right)$ に等しいので主張が示された． ∎

3.2 有限集合上の分布

次に，確率変数の取りうる値が有限個の場合を考える．これは保険金の実績データを経験分布と見なして Wang 変換による保険料を求める際に利用することができる．

命題 3.7 X の取りうる値が $x_1 < \cdots < x_n$ $(n \geqq 1)$ であるとし，$p_i = P(X = x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ とする．このとき $q_0 = 0$, $q_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} p_j$ $(i = 1, \ldots, n)$ とおくと次が成り立つ：

$$\pi(X, h) = \sum_{i=1}^{n} x_i\bigl(\Phi(\Phi^{-1}(q_i) - h) - \Phi(\Phi^{-1}(q_{i-1}) - h)\bigr).$$

証明 $F_X(x)$ は $x < x_1$ のとき 0，$x_i \leqq x < x_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ のとき q_i，$x_n \leqq x$ のとき 1 に等しい．したがって，$F_{W_{X,h}}(x) = \Phi\bigl(\Phi^{-1}(F_X(x)) - h\bigr)$ は $x < x_1$ のとき 0，$x_i \leqq x < x_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ のとき $\Phi(\Phi^{-1}(q_i) - h)$，$x_n \leqq x$ のとき 1 に等しい．

これより，$i = 1, \ldots, n$ に対して $P(W_{X,h} = x_i) = \Phi(\Phi^{-1}(q_i) - h) - \Phi(\Phi^{-1}(q_{i-1}) - h)$ が成り立ち，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(W_{X,h} = x_i) = 1$ となるので

$$\pi(X, h) = E[W_{X,h}] = \sum_{i=1}^{n} x_i\bigl(\Phi(\Phi^{-1}(q_i) - h) - \Phi(\Phi^{-1}(q_{i-1}) - h)\bigr)$$

を得る． ∎

系 3.8 X がデータ $\{x_1,\ldots,x_n\}$ $(n \geqq 1,\ x_1 \leqq \cdots \leqq x_n)$ の経験分布に従う，すなわち $P(X=x) = \dfrac{\#\{i \mid x_i = x\}}{n}$ $(x \in \mathbb{R})$ が成り立つとする．このとき次が成り立つ：

$$\pi(X,h) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\Phi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{i}{n}\right) - h\right) - \Phi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{i-1}{n}\right) - h\right)\right).$$

証明 $\{x_1,\ldots,x_n\}$ を異なる値ごとに分類して前命題を適用すればよい． ∎

この系により，データ $\{x_1,\ldots,x_n\}$ から Wang 変換による保険料を計算することができる．例えば統計処理ソフト R では，次のように計算プログラムを作成できる：

```
# 関数"wang"の定義
wang = function(x,h){
 n = length(x)
 phi = outer(0:n,h,function(i,k){pnorm(qnorm(i/n)-k)})
 return(as.vector(sort(x) %*% diff(phi)))
}
# 使用例
x=c(2,4,6,0,0,3,2,0,5)
wang(x,h=c(0,1,2))  # h=0, 1, 2 の結果が出力される
```

3.3 数値例

Wang 変換による保険料の計算例を挙げる．

100,000 件の保険契約に対して事故頻度が 1% であり，事故があった場合の保険金が対数正規分布 $LN(10,4)$ に従うデータを乱数によって生成し（データ概要は表 1 の通り），前掲の R プログラムを用いて Wang 変換による保険料を計算した．

表 2 から，h を 0 から 1 まで増加させるとリスクプレミアムが急激に増加していく様子が分かる．リスクプレミアムは一般的な損害保険料率における予定利潤部分にあたり，その水準は保険料全体の数 % であること

表 1　データ概要

データ数	0 の数	平均	標準偏差
100,000	99,000	1,542	69,096

表 2　Wang 変換による保険料

h	0	0.001	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1
保険料	1,542	1,547	1,569	1,597	1,654	1,836	2,181	3,063	8,131	36,003
リスクプレミアム	0%	0.4%	1.8%	3.6%	7.2%	19%	41%	99%	427%	2235%

を鑑みれば，この例では h は 0.01 前後の小さい値を適用することが現実的と考えられる．

4　パラメータに関する挙動

Wang 変換による保険料算出原理を実際に適用する際には，パラメータ h の設定が重要となる．

$h=0$ のときリスクプレミアムは 0，つまり保険料が保険金の期待値に等しくなることから，ここでは h が 0 に近いときの振る舞いに注目する．

4.1　一次近似

まず一次近似を考える．注意 2.8 より，

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial h}\right|_{h=0}\pi(X,h) &= \left.\frac{\partial}{\partial h}\right|_{h=0}\left(\int_0^\infty (1-F_{W_{X,h}}(x))\,dx - \int_{-\infty}^0 F_{W_{X,h}}(x)\,dx\right)\\ &= -\int_{-\infty}^\infty \left.\frac{\partial}{\partial h}\right|_{h=0} F_{W_{X,h}}(x)\,dx\\ &= \int_{-\infty}^\infty \varphi\bigl(\Phi^{-1}(F_X(x))\bigr)\,dx\end{aligned}$$

となるので，適切な可積分性の条件の下で

$$\pi(X,h) \fallingdotseq E[X] + h\int_{-\infty}^\infty \varphi\bigl(\Phi^{-1}(F_X(x))\bigr)\,dx \qquad (h \fallingdotseq 0)$$

と近似できる．

4.2　Wang 変換と Hermite 多項式

次に，一般の n 次近似を考える．$\pi(X,h)$ を Maclaurin 展開すると，係数が Hermite 多項式を用いて表されることが示される．

定義 4.1 非負整数 n に対して，**Hermite 多項式** (Hermite polynomial)$H_n(x)$ を次で定義する：

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

例 4.2 $H_0(x)=1$, $H_1(x)=x$, $H_2(x)=x^2-1$ である．

補題 4.3 Z を標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数とする．確率変数 X に対し，$g = F_X^{-1}\circ\Phi$ とおくと，$g(Z+h)$ は $W_{X,h}$ と同分布である．
ここで，$0<p<1$ に対し $F_X^{-1}(p) = \inf\{x\in\mathbb{R} \mid F_X(x) \geqq p\}$ と定める．

証明 $g(Z+h)$ の分布関数は

$$\begin{aligned}P(g(Z+h)\leqq x) &= P\bigl(F_X^{-1}(\Phi(Z+h))\leqq x\bigr) = P(\Phi(Z+h)\leqq F_X(x))\\ &= P\bigl(Z\leqq \Phi^{-1}(F_X(x))-h\bigr) = \Phi\bigl(\Phi^{-1}(F_X(x))-h\bigr)\end{aligned}$$

となり $W_{X,h}$ の分布関数に等しいので主張を得る． ∎

定理 4.4 確率変数 X に対し，$g = F_X^{-1} \circ \Phi$ とおき，非負整数 n に対して

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} g(z) H_n(z) \varphi(z)\, dz$$

とおくと，適切な可積分性の条件の下で次が成立する：

$$\pi(X, h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} h^n.$$

証明 前補題より，

$$\begin{aligned}\pi(X,h) = E[W_{X,h}] = E[g(Z+h)] &= \int_{-\infty}^{\infty} g(z+h)\varphi(z)\, dz \\ = \int_{-\infty}^{\infty} g(z)\varphi(z-h)\, dz &= \int_{-\infty}^{\infty} g(z) \exp\left(hz - \frac{h^2}{2}\right)\varphi(z)\, dz\end{aligned}$$

である．ここで，Hermite 多項式の母関数

$$\exp\left(tx - \frac{t^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

を用いることにより

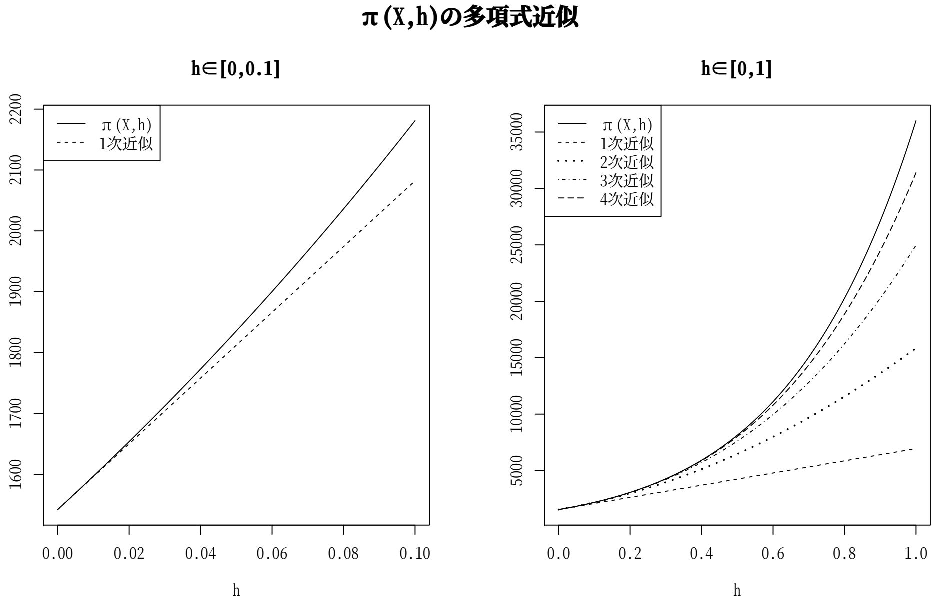
$$\begin{aligned}\pi(X,h) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(z) \left(\sum_{n=0}^{\infty} H_n(z) \frac{h^n}{n!}\right) \varphi(z)\, dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} g(z) H_n(z) \varphi(z)\, dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} h^n\end{aligned}$$

を得る． ∎

注意 4.5 $a_n = E[g(Z)H_n(Z)] = E[XH_n(Z)]$ と書ける．また，次が成立する：

$$\begin{aligned}&a_0 = E[X], \\ &a_1 = E[XZ] = \mathrm{Cov}(X, Z) \leqq \sqrt{V(X)}. \qquad (E[Z] = 0,\ V(Z) = 1 \text{ に注意})\end{aligned}$$

注意 4.6 前節の数値例の場合に，パラメータ h を変化させたときの $\pi(X,h)$ の様子とその低次の多項式近似を図示すると次のようになる．現実的な h の値に対しては，一次近似でも比較的精度が良くなっていることが見て取れる．



Hermite 多項式が φ を重みとする完全な直交多項式系であることに注意すると，$\pi(X,h)$ から $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ が定まり，そこから F_X が一意的に復元できることが分かる．すなわち，次が成り立つ：

系 4.7 確率変数 X, Y に対して，任意の $h \geqq 0$ に対して $\pi(X,h) = \pi(Y,h)$ が成り立つならば X と Y は同分布である．

5　まとめ

Wang 変換による保険料算出原理を実際の保険料率算出に適用するためには，パラメータ h の設定方法が課題になると考えられる．

h の値によって保険料の算出結果は大きく変化する一方，前もって適切な h を定めるための論理的な根拠を見出すのは難しいように思える．現実的には，既に使用されている保険料から h を逆算し，その値を継続的に使用するといった方法が考えられるが，その値が適切であるかを検証するのは依然として課題となる．

保険金が従う確率分布に対して Wang 変換による保険料を解析的に計算することは一般的には難しいが，この問題点に対しては本稿で一定の改善を実現できていると考えられる．具体的には，系 3.8 でデータから保険料を比較的容易に算出できること，定理 4.4 で h による挙動の多項式近似が得られたことである．後者は，パラメータ h の調整にも役立つと考えられる．

参考文献

[1] S. S. Wang, A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks, *J. Risk Insurance* **67** (2000), no. 1, 15–36.

[2] H. Föllmer and A. Schied, *Stochastic finance*, extended ed., Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2011, An introduction in discrete time.