

# 損害保険でのパラメータリスク・モデルリスクの Bayes 推定による評価

近藤宏樹<sup>1</sup> 斎藤新悟<sup>2,\*</sup>

<sup>1</sup> 日新火災海上保険株式会社・九州大学大学院数理学府

<sup>2</sup> 九州大学基幹教育院

\* 登壇者

2013/09/09

(講演者名は五十音順)

# 考察する問題

## 既知のデータ

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  : ある保険種目の過去  $n$  年分の**損害率**  $\left( := \frac{\text{保険金}}{\text{保険料}} \right)$ .

例 :  $x_1 = 0.33, x_2 = 0.42, \dots$

## 目標

翌年の損害率  $y$  の **Value at Risk (VaR)**, 分位点) を求めたい.  
つまり,  $0 < \alpha < 1$  として (例 :  $\alpha = 0.99$ ),

$$\text{Prob}(y \leq ???) = \alpha$$

なる値 ( $100\alpha\%$  VaR) を求めたい.

**【仮定】**  $x_1, \dots, x_n, y$  は独立同分布.

以下,  $x_1, \dots, x_n$  を代表して  $x$  で表す.

## 従来の手法

- (1)  $x$  が平均  $\mu$ , 標準偏差  $\sigma$  の正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$  に従うと仮定.
- (2)  $\mu, \sigma$  を最尤法で推定: 推定量  $\hat{\mu}, \hat{\sigma}$ .
- (3) 求める VaR の推定量として  $N(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$  の VaR を用いる.

## 考慮されているリスク

- (1) プロセスリスク: 損害率のランダム性に起因.

## 考慮されていないリスク

- (2) パラメータリスク: パラメータの推定誤差に起因.
- (3) モデルリスク: モデル (確率分布の種類) の選択の誤りに起因.

→ (2), (3) を考慮するために Bayes 推定を用いる.

## パラメータリスク

**尤度** :  $x|\mu, \tau \sim N(\mu, \tau^{-1})$ .

**事前分布** :  $(\mu, \tau) \sim \text{NG}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  ( $\alpha, \beta, \delta > 0, \gamma \in \mathbb{R}$ ) (**正規ガンマ分布**).

→ **事後分布** :  $(\mu, \tau)|\mathbf{x} \sim \text{NG}(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$  (**共役事前分布**).

→ 求める VaR の推定量として  $y|\mathbf{x}$  (**事後予測分布**) の VaR を用いる.

事前分布のパラメータは  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \left(-\frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)$  と選ぶ.

これは  $f(\mu, \tau) \propto \tau^{-1}$  という **変則事前分布** (事後分布は通常の分布).

## モデルリスク

前ページの議論は正規分布を**対数正規分布**に変えても全く同様にできる。  
→ モデル空間  $\mathcal{M} = \{N, LN\}$  (N : 正規, LN : 対数正規) 上で Bayes 推定を行う。

## $\mathcal{M}$ 上の事後分布の計算

$$f(N|\mathbf{x}) : f(LN|\mathbf{x}) = f(N)f(\mathbf{x}|N) : f(LN)f(\mathbf{x}|LN).$$

$(\mu, \tau)$  の事前分布は変則事前分布。

→  $f(\mathbf{x}|N)$ ,  $f(\mathbf{x}|LN)$  はそのままでは計算できない。

→  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  のままで  $\frac{f(\mathbf{x}|N)}{f(\mathbf{x}|LN)}$  を計算し、

**約分した後で**  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \left(-\frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)$  を代入。

# 数値例と今後の課題

## 数値例

$n = 10$ ,  $\mathbf{x} = (0.33, 0.42, 0.37, 0.29, 0.31, 0.35, 0.42, 0.29, 0.23, 0.27)$ .

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
分布	N	N	LN	LN	N/LN
プロセスリスク	○	○	○	○	○
パラメータリスク	×	○	×	○	○
モデルリスク	×	×	×	×	○
99%VaR	<b>0.466</b>	<b>0.513</b>	0.494	0.571	<b>0.558</b>

## 今後の課題

- 提案手法の理論的裏付け.
- 正規分布・対数正規分布以外の分布への手法の拡張.  
→ パラメータリスクは比較的容易, モデルリスクは困難.