IBNRの区間推定の各種方法について：理論と実装例

廣津剛裕 [1]　近藤宏樹 [1]　斎藤新悟 [2]

[1] 日新火災海上保険株式会社

[2] 九州大学大学院数理学研究院

2009/11/06

はじめに

ここで発表する結果は,

- 日新火災海上保険株式会社,
- 九州大学大学院数理学研究院

の共同研究の成果である.

共同研究メンバー（色つきは発表者）:

日新火災海上保険株式会社
廣津剛裕・佐藤拓哉
吉満隆亮・横山慶子
近藤宏樹

九州大学大学院数理学研究院
谷口説男・田中立志
斎藤新悟

九州大学大学院数理学府
大輪拓也・川野秀一

発表の概略

- IBNR の復習
- IBNR の区間推定の諸手法
  - (1) Mack 法
  - (2) ブートストラップ法
  - (3) ランダムウォーク法
- 各手法の実装例
- まとめ

$C_{i,j}$: 事故年度 i, 経過年数 j までの累積発生保険金 $(i,j=1,\ldots,n)$.
$i+j \leqq n+1$ に対する $C_{i,j}$ が既知.

		経過年数 j				
		1	2	$\cdots$	$n-1$	n
事故年度 i	1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$\cdots$	$C_{1,n-1}$	$C_{1,n}$
	2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	$\cdots$	$C_{2,n-1}$	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$		
	$n-1$	$C_{n-1,1}$	$C_{n-1,2}$			
	n	$C_{n,1}$				

IBNR

$$R=(C_{2,n}-C_{2,n-1})+(C_{3,n}-C_{3,n-2})+\cdots+(C_{n,n}-C_{n,1}).$$

次年度発生額

$$S=(C_{2,n}-C_{2,n-1})+(C_{3,n-1}-C_{3,n-2})+\cdots+(C_{n,2}-C_{n,1}).$$

チェーンラダー法

日新火災海上保険株式会社
Math-for-industry Education & Research Hub

チェーンラダー法は IBNR の点推定を与える．

Loss Development Factor $\widehat{f}_j = \dfrac{C_{1,j+1} + \cdots + C_{n-j,j+1}}{C_{1,j} + \cdots + C_{n-j,j}}$.

$$\widehat{C}_{i,j} = C_{i,n+1-i}\widehat{f}_{n+1-i} \cdots \widehat{f}_{j-1} \qquad (i + j \geqq n + 2).$$

問題

IBNR を区間推定するにはどうすればよいか？

$\longrightarrow$ ここでは次の 3 つの方法を紹介：

(1) Mack 法

(2) ブートストラップ法

(3) ランダムウォーク法

Mack 法：モデルの拡張

Mack 法のアイデア：

- チェーンラダー法を正当化する distribution-free なモデルを設定.
- 平均 2 乗誤差を推定.

Mack モデル

(1) $C_{i,j}$ は異なる事故年度 i について独立.

(2) $E[C_{i,j+1}|C_{i,1},\ldots,C_{i,j}] = C_{i,j}f_j$.

(3) $V(C_{i,j+1}|C_{i,1},\ldots,C_{i,j}) = C_{i,j}v_j$.

(3) はチェーンラダー法の LDF が最良推定量であることを導くが,
必ずしも自然な仮定とはいい難い.

Mack モデルの拡張

(1), (2) Mack モデルと同じ.

(3′) $V(C_{i,j+1}|C_{i,1},\ldots,C_{i,j}) = C_{i,j}^{\alpha}v_j$ （α は任意の定数）.

日新火災海上保険株式会社

Math-for-industry Education & Research Hub

Mack モデル（拡張）での点推定

パラメータは次で推定する：

$$\widehat{f}_j = \frac{C_{1,j}^{1-\alpha} C_{1,j+1} + \cdots + C_{n-j,j}^{1-\alpha} C_{n-j,j+1}}{C_{1,j}^{2-\alpha} + \cdots + C_{n-j,j}^{2-\alpha}},$$

$$\widehat{C}_{i,j} = C_{i,n+1-i} \widehat{f}_{n+1-i} \cdots \widehat{f}_{j-1} \qquad (i + j \geqq n + 2),$$

$$\widehat{v}_j = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}^{2-\alpha} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \widehat{f}_j \right)^2 .$$

$\alpha = 1$ の場合は $\widehat{f}_j$ はチェーンラダー法の推定量に一致する.

Mack 法：区間推定

R：IBNR，$\widehat{R}$：その推定量．
S：次年度発生額，$\widehat{S}$：その推定量．

平均 2 乗誤差 $\mathrm{mse}\,\widehat{R} = E\big[(R-\widehat{R})^2 \mid C_{i,j}\ (i+j \leqq n+1)\big]$ を考える（分散のようなもの）．
これを用いると，Chebyshev の不等式より 95%信頼区間は次で保守的に推定できる：

$$\big(\widehat{R} - 2\sqrt{5}\,(\mathrm{mse}\,\widehat{R})^{1/2}, \widehat{R} + 2\sqrt{5}\,(\mathrm{mse}\,\widehat{R})^{1/2}\big).$$

Mack の公式（拡張版）

$\mathrm{mse}\,\widehat{R}$, $\mathrm{mse}\,\widehat{S}$ などを推定する公式．
例えば $\mathrm{mse}\,\widehat{S}$ は次で推定する：

$$\sum_{i=2}^{n} \widehat{C}^2_{i,n+2-i} \frac{\widehat{v}_{n+1-i}}{\widehat{f}^2_{n+1-i}} \left(\frac{1}{\widehat{C}^{2-\alpha}_{i,n+1-i}} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{i-1} C^{2-\alpha}_{k,n+1-i}} \right).$$

ブートストラップ法

日新火災海上保険株式会社
Math-for-industry Education & Research Hub

ブートストラップ法とは,

- 乱数を用いたシミュレーションで元のランオフ三角形から擬似的なランオフ三角形を作成し,
- それらの IBNR の分布から元の IBNR を区間推定する方法.

$X_{i,j} = C_{i,j} - C_{i,j-1}$：事故年度 i，経過年数 j での当該年度発生保険金.

仮定

$X_{i,j}$ は独立で超過分散 Poisson 分布に従う.
つまり，ある定数 ϕ（スケールパラメータ）について,
$\dfrac{X_{i,j}}{\phi}$ は独立で Poisson 分布に従う.

このとき $V(X_{i,j}) = \phi E[X_{i,j}]$.

日新火災海上保険株式会社

Math-for-industry Education & Research Hub

(1) $\widehat{f}_j$：チェーンラダー法での LDF の推定量.

$$C^{\mathrm{CL}}_{i,j} = \frac{C_{i,n+1-i}}{\widehat{f}_j \cdots \widehat{f}_{n-i}},\ X^{\mathrm{CL}}_{i,j} = C^{\mathrm{CL}}_{i,j} - C^{\mathrm{CL}}_{i,j-1}\ (i+j \leqq n+1).$$

(2) $r_{i,j} = \dfrac{X_{i,j} - X^{\mathrm{CL}}_{i,j}}{\sqrt{X^{\mathrm{CL}}_{i,j}}}$ $(i+j \leqq n+1)$：Pearson 残差,

$$\widehat{\phi} = \frac{\sum_{i+j\leqq n+1} r^2_{i,j}}{N-p}\ :\ \phi \text{ の推定量}$$

$$\left(N = \frac{1}{2}n(n+1) : \text{既知の } C_{i,j} \text{ の個数},\ \ p = 2n-1 : \text{パラメータ数}\right).$$

日新火災海上保険株式会社

Math-for-industry Education & Research Hub

(3) 以下の操作を繰り返す：

(a) 各 i, j $(i+j \leqq n+1)$ に対して，
$r^*_{i,j}$ を $\left\{ \sqrt{\dfrac{N}{N-p}}\, r_{i,j} \;\middle|\; i+j \leqq n+1 \right\}$ からの復元抽出サンプルとし，
$X^*_{i,j} = X^{\mathrm{CL}}_{i,j} + r^*_{i,j}\sqrt{X^{\mathrm{CL}}_{i,j}}$ とおく．

(b) $X^*_{i,j}$ $(i+j \leqq n+1)$ からチェーンラダー法で
$X^*_{i,j}$ $(i+j \geqq n+2)$ を作る．

(c) $X^{**}_{i,j}$ $(i+j \geqq n+2)$ を平均 $X^*_{i,j}$，分散 $\widehat{\phi} X^*_{i,j}$ の超過分散 Poisson 分布からのサンプルとする．

(d) IBNR などを $R^{**} = \displaystyle\sum_{i+j \geqq n+2} X^{**}_{i,j}$ などで求める．

(4) 繰り返しによって得られた R^{**} の分布から信頼区間を求める．

日新火災海上保険株式会社
Math-for-industry Education & Research Hub

仮定

経過年数は連続的な値を取る変数 t とし，$C_{i,t}$ は確率微分方程式

$$dC_{i,t} = \mu(t)C_{i,t}dt + \sigma(t)C_{i,t}dB_t^i$$

を満たす．ただし，μ, σ は連続関数で，B_t^i は独立な Brown 運動．

これより $s < t$ に対し，

- $\dfrac{C_{i,t}}{C_{i,s}} \sim \mathrm{LogNormal}\big(m(s,t), v(s,t)\big)$.
  ただし $m(s,t) = \displaystyle\int_s^t \left(\mu(u) - \frac{1}{2}\sigma(u)^2\right) du,\ v(s,t) = \int_s^t \sigma(u)^2\, du.$
- $C_{i,s}$ と $\dfrac{C_{i,t}}{C_{i,s}}$ は独立．

ランダムウォーク法：μ, σ の推定

$\mu(t)$, $\sigma(t)$ は次のいずれかの形であると仮定する：

$$\alpha \exp(-\beta t^{\gamma}), \quad \alpha(1+\beta t)^{-\gamma}, \quad \alpha t^{-\beta}+\gamma \qquad (\alpha, \beta, \gamma > 0).$$

ここで,

$$\log \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \sim N\big(m(j, j+1), v(j, j+1)\big)$$

なので，既知の $\log \dfrac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$ の標本平均，不偏分散から最小二乗法により $\mu(t)$, $\sigma(t)$ を推定する.

注：$\log \dfrac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$ の代わりに $\log \dfrac{C_{i,j}}{C_{i,1}}$ を用いて推定することも可能.

ランダムウォーク法：IBNR の分布

IBNR 備金 $R = \sum_{i=2}^{n} (C_{i,n} - C_{i,n+1-i})$ の分布を求める.

- $C_{i,n+1-i}$ は既知.
- $\dfrac{C_{i,n}}{C_{i,n+1-i}} \sim \mathrm{LogNormal}\big(m(n+1-i,n), v(n+1-i,n)\big)$.
  これは $C_{i,n+1-i}$ と独立.
- $R = \sum_{i=2}^{n} C_{i,n+1-i}\left(\dfrac{C_{i,n}}{C_{i,n+1-i}} - 1\right)$ より分布が求まる
  （i に関する独立性）.

次年度発生額 S の分布も同様に求まる.

$\longrightarrow$ 信頼区間も求まる.

次の実データ（仮データ）を利用：

		経過年数							
		1	2	3	4	5	6	7	8
事故年度	1	182	622	646	739	784	788	789	796
	2	181	548	605	715	718	722	723	
	3	265	761	981	1,038	1,042	1,150		
	4	333	1,011	1,076	1,170	1,313			
	5	288	873	1,106	1,227				
	6	278	844	1,299					
	7	404	1,214						
	8	374							

このデータに基づいて，3 つの方法で IBNR 備金 R，次年度発生額 S の 95% 信頼区間を求める．

実装例：Mack 法

Mack 法の実装

- 表計算ソフト Excel，数式処理ソフト Maxima を利用して実装し，結果が合致することを確認した．
- α は 0, 1, 2, 3 の場合を計算した．

利点：

- 計算が容易でシミュレーションが不要．
- プロセスリスクだけでなく，パラメータリスクも考慮している．

欠点：

- 信頼区間の構成に Chebyshev の不等式を用いている（distribution-free なモデルであることの弊害）．

実装例：ブートストラップ法

ブートストラップ法の実装

- 表計算ソフト Excel，計算機代数システム Risa/Asir，
  プログラミング言語 Java を利用して実装した．
- 乱数にメルセンヌ・ツイスタを用い，速度と品質を向上させた．
- 信頼区間を求める際にパーセンタイル法を用いた．
- 超過分散 Poisson モデルの他にガンマモデルの場合にも計算した．

利点：

- 信頼区間の構成が容易．
- プロセスリスクだけでなく，パラメータリスクも考慮している．

欠点：

- シミュレーションが必要．
  シミュレーションのたびに結果が異なる．

日新火災海上保険株式会社
Math-for-industry Education & Research Hub

ランダムウォーク法の実装

- 表計算ソフト Excel，統計ソフト R を利用して実装した．
- R, S の分布は複雑なので，平均・分散を求めた後に Chebyshev の不等式を用いて信頼区間を保守的に計算した．

利点：

- 数学的に自然なモデルである．

欠点：

- 関数の決定が困難．
  仮定した関数形が自然であるかは疑問．
- 信頼区間の構成に Chebyshev の不等式を用いている（計算を簡易化するため．原理的には解消できる）．
- パラメータリスクは考慮していない．

IBNR 備金 R の推定

IBNR 備金 R の点推定・95%信頼区間は次のようになる：

手法	区間推定下端	点推定	区間推定上端
Mack ($\alpha = 0$)	210	2,567	4,923
Mack ($\alpha = 1$)	-46	2,497	5,040
Mack ($\alpha = 2$)	-383	2,430	5,243
Mack ($\alpha = 3$)	-842	2,368	5,578
ブートストラップ (Poisson)	1,249	2,516	4,110
ブートストラップ（ガンマ）	1,291	2,523	4,205
ランダムウォーク	91	2,291	4,491

次年度発生額 S の推定

次年度発生額 S の点推定・95%信頼区間は次のようになる：

手法	区間推定下端	点推定	区間推定上端
Mack ($\alpha = 0$)	363	1,320	2,277
Mack ($\alpha = 1$)	209	1,311	2,413
Mack ($\alpha = 2$)	3	1,302	2,600
Mack ($\alpha = 3$)	−268	1,292	2,853
ブートストラップ (Poisson)	663	1,324	2,183
ブートストラップ（ガンマ）	664	1,328	2,231
ランダムウォーク	244	1,281	2,318

まとめ

考察：

- Mack 法では α によって無視できない差が生じる．
- 点推定にはそれほど大きな差は見られないが，
  区間推定は手法によってまちまちであった．
- Mack 法，ランダムウォーク法は Chebyshev の不等式を用いるため
  ブートストラップ法より広い信頼区間が得られる．

課題：

- Mack 法の α はどう定めればよいか？
- ランダムウォーク法でパラメータリスクを計算できるか？

実務的な観点からは，事業年度別に信頼区間が計算できるため，

- 資本コスト法によるリスクマージンの計算に利用できる．
- 実績と比較することでモデルの妥当性が検証できる．

参考文献

- 谷口説男編：プロシーディング「損保数理に現れる確率モデル」, Math-for-Industry レクチャーノートシリーズ, vol. 13 (2009).
- Hirotsu, T. and Taniguchi, S.: *The random walk model revisited*, Journal of Math-for-Industry, vol. 1 (2009), 1–6.
- Saito, S.: *Generalisation of Mack's formula for claims reserving with arbitrary exponents for the variance assumption*, Journal of Math-for-Industry, vol. 1 (2009), 7–15.