# 数理ファイナンス入門

斎藤新悟
（九州大学マス・フォア・インダストリ研究所）

プレゼンテーション資料：`http://goo.gl/vg7eS`

## この講演の目標

**Black-Scholes の公式**：

行使価格 $K$，満期 $T$ のコールオプションの価格は

$$\boldsymbol{S\Phi(d_+) - Ke^{-rT}\Phi(d_-)}.$$

ただし

$$d_\pm = \frac{\log\frac{S}{K} + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

---

## 市場

- **現金**（安全資産）：単位時間あたりの利率 $r$.
  預金も借金も同じ利率.
- **株**（危険資産）：時刻 $t$ での 1 単位の株価 $S_t$.
  現時点での株価 $S_0 = S$ は既知.
  未来の株価 $S_t$ $(t > 0)$ は未知（確率変数）.

できるだけシンプルなモデルにしたい：

手数料なし，空売り可，株の売買で価格変動なし.

## コールオプションとは

**行使価格** $K$, **満期** $T$ の**コールオプション**

$=$ 時刻 $T$ において株1単位を価格 $K$ で買う**権利**.

**権利なので行使しなくてもよい**.

$$S_T > K \implies \text{行使} \implies S_T - K \text{ 円の価値},$$

$$S_T \leqq K \implies \text{行使しない} \implies 0 \text{ 円の価値}.$$

$$\textbf{時刻 } \boldsymbol{T} \textbf{ での価値} = \begin{cases} S_T - K & (S_T > K), \\ 0 & (S_T \leqq K) \end{cases}$$

$$= \max\{S_T - K, 0\} =: \boldsymbol{f(S_T)}.$$

損をすることはない（常に $f(S_T) \geqq 0$）.

$\longrightarrow$ ただでは売れない.

$\longrightarrow$ **価格はいくらか？**

価格を決める際に必要なこと：株価変動の**モデル化**.

## 1 期間二項モデル $(T=1)$

$$
S_0 = S \begin{array}{l} \nearrow \; S_1 = (1+u)S \\ \\ \searrow \; S_1 = (1+d)S \end{array}
$$

ただし

$$0 < 1+d < 1+r < 1+u.$$

実は**上昇確率・下降確率は価格に影響しない**.

価格決定の方法：**複製戦略**を作る.

- 時刻 0 で現金 $\alpha$ 円と株 $\beta$ 単位を持つこと,
- 時刻 0 でコールオプションを持つこと

の時刻 1 での価値が常に等しくなる $\alpha, \beta$ を探す.
これは「常に $(1+r)\alpha + S_1\beta = f(S_1)$」すなわち

$$(1+r)\boldsymbol{\alpha} + (1+u)S\boldsymbol{\beta} = f((1+u)S), \tag{1}$$
$$(1+r)\boldsymbol{\alpha} + (1+d)S\boldsymbol{\beta} = f((1+d)S) \tag{2}$$

ということ.
この連立方程式はただ 1 つの解 $(\alpha, \beta)$ を持つ.
時刻 0 でのコールオプションの価格 $= \alpha + S\beta$.

$(\alpha,\beta)$ を求めずに $\alpha+S\beta$ を計算しよう．
$q$ を

$$(1+u)q+(1+d)(1-q)=1+r$$

を満たすように取る．すなわち $q=\dfrac{r-d}{u-d}\in(0,1)$.
(1) $\times\, q+$ (2) $\times\,(1-q)$ を計算すると

$$(1+r)(\alpha+S\beta)=qf((1+u)S)+(1-q)f((1+d)S)$$

となるので

$$\begin{aligned}\text{時刻 0 でのオプション価格} &= \alpha+S\beta\\ &= \boldsymbol{q\frac{f((1+u)S)}{1+r}+(1-q)\frac{f((1+d)S)}{1+r}}.\end{aligned}$$

**株価の上昇・下降確率はオプション価格に無関係.**
**上昇確率 $q$, 下降確率 $1-q$** とすると,

$$\begin{aligned}\textbf{オプション価格} &= \frac{\text{時刻 1 での価値}}{1+r}\text{ の期待値}\\ &= \textbf{価値の現価の期待値}.\end{aligned}$$

$q$ を**リスク中立確率**と呼ぶ.

## 2 期間二項モデル $(T = 2)$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & S_2 = (1+u)^2 S \\
 & S_1 = (1+u)S \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = S \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2 = (1+u)(1+d)S \\
 & S_1 = (1+d)S \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2 = (1+d)^2 S
\end{tikzcd}
$$

**Step 1：時刻 1 でのオプション価格を求める.**

$$
\begin{tikzcd}
 & S_2 = (1+u)S_1 \\
S_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & S_2 = (1+d)S_1
\end{tikzcd}
$$

という部分は 1 期間二項モデルと同じ.

時刻 1 でのオプション価格

$$
= q\frac{f((1+u)S_1)}{1+r} + (1-q)\frac{f((1+d)S_1)}{1+r}.
$$

## **Step 2**：時刻 0 での価格を求める.

時刻 0 での価格

$$= q\frac{q\frac{f((1+u)^2S)}{1+r} + (1-q)\frac{f((1+u)(1+d)S)}{1+r}}{1+r}$$

$$+ (1-q)\frac{q\frac{f((1+u)(1+d)S)}{1+r} + (1-q)\frac{f((1+d)^2S)}{1+r}}{1+r}$$

$$= q^2\frac{f((1+u)^2S)}{(1+r)^2} + 2q(1-q)\frac{f((1+u)(1+d)S)}{(1+r)^2}$$

$$+ (1-q)^2\frac{f((1+d)^2S)}{(1+r)^2}.$$

**株価の上昇・下降確率はオプション価格に無関係.**

**上昇確率 $q$，下降確率 $1-q$** とすると,

$$\textbf{オプション価格} = \frac{\text{時刻 2 での価値}}{(1+r)^2} \text{ の期待値}$$

$$= \textbf{価値の現価の期待値}.$$

## $n$ 期間二項モデル $(T=n)$

$$\text{オプション価格} = \frac{\text{時刻 } n \text{ での価値}}{(1+r)^n} \text{ の期待値}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^{n-k}(1-q)^k \frac{f((1+u)^{n-k}(1+d)^k S)}{(1+r)^n}.$$

## 離散から連続へ ($T$ は正の実数)

$[0,T]$ を $n$ 等分し，$n \to \infty$ とする．
今までの $r, u, d, q$ は添字 $n$ をつけて表す ($r_n$ など)．
$S_n$ は $S$ に $1+u_n$ または $1+d_n$ を $n$ 回かけたもの：

$$\log S_n = \log S + \xi_1 + \cdots + \xi_n.$$

$\xi_1, \ldots, \xi_n$ は独立同分布で

$$\xi_i = \begin{cases} \log(1+u_n) & (\text{確率 } q_n), \\ \log(1+d_n) & (\text{確率 } 1-q_n). \end{cases}$$

記号の簡略化のため $\mu_n, \sigma_n$ を

$$\mu_n + \sigma_n = \log(1+u_n), \quad \mu_n - \sigma_n = \log(1+d_n)$$

で定める．

このとき

$$
\begin{aligned}
\text{期待値 } E[\xi_i] &= (\mu_n + \sigma_n)q_n + (\mu_n - \sigma_n)(1 - q_n) \\
&= \mu_n + (2q_n - 1)\sigma_n, \\
\text{分散 } V(\xi_i) &:= E\big[(\xi_i - E[\xi_i])^2\big] \\
&= \big(2(1 - q_n)\sigma_n\big)^2 q_n + (2q_n\sigma_n)^2(1 - q_n) \\
&= 4q_n(1 - q_n)\sigma_n^2.
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
E[\log S_n] &= \log S + E[\xi_1] + \cdots + E[\xi_n] \\
&= \log S + n\big(\mu_n + (2q_n - 1)\sigma_n\big), \\
V(\log S_n) &= V(\xi_1) + \cdots + V(\xi_n) \\
&= 4nq_n(1 - q_n)\sigma_n^2.
\end{aligned}
$$

**これらがちゃんと収束するように $u_n$ などを定める.**

- $r_n = r\dfrac{T}{n}$,
- $u_n = \mu\dfrac{T}{n} + \sigma\sqrt{\dfrac{T}{n}}, \quad d_n = \mu\dfrac{T}{n} - \sigma\sqrt{\dfrac{T}{n}}.$

$q_n$ の計算：

$$q_n = \frac{r_n - d_n}{u_n - d_n} = \frac{r\frac{T}{n} - \left(\mu\frac{T}{n} - \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\right)}{\left(\mu\frac{T}{n} + \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\right) - \left(\mu\frac{T}{n} - \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\right)}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{r-\mu}{2\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}}.$$

$\mu_n, \sigma_n$ の計算：

$$\begin{aligned}
\mu_n + \sigma_n &= \log(1+u_n) \\
&= \log\left(1 + \mu\frac{T}{n} + \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\right) \\
&\fallingdotseq \left(\mu\frac{T}{n} + \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\right) - \frac{1}{2}\left(\mu\frac{T}{n} + \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\right)^2 \\
&\fallingdotseq \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{T}{n} + \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}.
\end{aligned}$$

同様に $\mu_n - \sigma_n = \log(1+d_n) \fallingdotseq \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{T}{n} - \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}$.

よって

$$\mu_n \fallingdotseq \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{T}{n}, \quad \sigma_n \fallingdotseq \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}.$$

ゆえに

$$
\begin{aligned}
E[\log S_n] &= \log S + n\bigl(\mu_n + (2q_n - 1)\sigma_n\bigr) \\
&\fallingdotseq \log S + n\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{T}{n} + \frac{r-\mu}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}} \cdot \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\right) \\
&= \log S + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \\
V(\log S_n) &= 4nq_n(1-q_n)\sigma_n^2 \\
&\fallingdotseq 4n\left(\frac{1}{2} + \frac{r-\mu}{2\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{r-\mu}{2\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}}\right)\sigma^2\frac{T}{n} \\
&\to \sigma^2 T \quad (n \to \infty).
\end{aligned}
$$

**中心極限定理**より，$n \to \infty$ の極限では $\log S_T$ は**正規分布**に従う：

$$
\boldsymbol{\log S_T \sim N\left(\log S + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right)}.
$$

これは,

$$\mathrm{Prob}(Z \leqq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dz =: \Phi(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

を満たす（**標準正規分布** $N(0,1)$ に従う）確率変数 $Z$ を用いて

$$\log S_T = \log S + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\,Z$$

と書けるということ.

ここで

$$d_{\pm} = \frac{\log\frac{S}{K} + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

とおくと,

$$S_T = e^{\log S + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\,Z} = Ke^{\sigma\sqrt{T}(Z + d_-)}.$$

計算したいもの：

**オプション価格 $=$ 価値の現価の期待値**.

$(1 + r_n)^n = \left(1 + r\dfrac{T}{n}\right)^n \to e^{rT}$ に注意すると,

$$\textbf{オプション価格} = E\left[\frac{f(S_T)}{e^{rT}}\right] = \boldsymbol{e^{-rT}E[f(S_T)]}.$$

$$
\begin{aligned}
E[f(S_T)] &= E[\max\{S_T - K, 0\}] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \max\{K e^{\sigma\sqrt{T}(z+d_-)} - K, 0\} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dz \\
&= \int_{-d_-}^{\infty} (K e^{\sigma\sqrt{T}(z+d_-)} - K) \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dz \\
&= K e^{\sigma\sqrt{T}\, d_- + \frac{\sigma^2}{2}T} \int_{-d_-}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(z-\sigma\sqrt{T})^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dz \\
&\qquad - K \int_{-d_-}^{\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dz \\
&= S e^{rT} \int_{-d_+}^{\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dz - K \int_{-d_-}^{\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dz \\
&= S e^{rT} \int_{-\infty}^{d_+} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dz - K \int_{-\infty}^{d_-} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dz \\
&= S e^{rT} \Phi(d_+) - K \Phi(d_-).
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
\begin{aligned}
\text{オプション価格} &= e^{-rT} E[f(S_T)] \\
&= S\Phi(d_+) - K e^{-rT} \Phi(d_-). \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

## 参考文献

- 藤田岳彦
  ファイナンスの確率解析入門
  講談社，2002
- 川崎英文，谷口説男
  最適化法／数理ファイナンスへの確率解析入門
  講談社，2008