等号つき多重ゼータ値に対する Bowman-Bradley の定理

斎藤新悟

九州大学大学院数理学研究院

2011/01/29

近藤宏樹氏（日新火災海上保険株式会社）
田中立志氏（九州大学大学院数理学研究院）
との共同研究

多重ゼータ値と等号つき多重ゼータ値

定義

$k_1, \ldots, k_n$ を正の整数とする $(k_1 \geqq 2)$.

- 多重ゼータ値：

$$\zeta(k_1, \ldots, k_n) = \sum_{m_1 > \cdots > m_n \geqq 1} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}}.$$

- 等号つき多重ゼータ値：

$$\zeta^\star(k_1, \ldots, k_n) = \sum_{m_1 \geqq \cdots \geqq m_n \geqq 1} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}}.$$

$n = 1$ のときは，Riemann ゼータ関数の特殊値である：

$$\zeta(k) = \zeta^\star(k) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^k}.$$

多重ゼータ値と等号つき多重ゼータ値

等号つき多重ゼータ値は多重ゼータ値の $\mathbb{Q}$ 線形結合で表せる：

$$\begin{aligned}\zeta^\star(k,l) &= \sum_{m \geqq n \geqq 1} \frac{1}{m^k n^l} = \sum_{m > n \geqq 1} \frac{1}{m^k n^l} + \sum_{m = n \geqq 1} \frac{1}{m^k n^l} \\ &= \zeta(k,l) + \zeta(k+l).\end{aligned}$$

逆に，多重ゼータ値は等号つき多重ゼータ値の $\mathbb{Q}$ 線形結合で表せる：

$$\zeta(k,l) = \zeta^\star(k,l) - \zeta^\star(k+l).$$

例：$\zeta(2,2)$, $\zeta^\star(2,2)$

$\boxed{\zeta(2,2),\ \zeta^\star(2,2)}$

$$\zeta(2)^2 = \left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\right)^2 = \sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{m^2n^2} = \left(\sum_{m>n}+\sum_{m<n}+\sum_{m=n}\right)\frac{1}{m^2n^2}$$
$$= 2\zeta(2,2)+\zeta(4)$$

なので
$$\zeta(2,2) = \frac{1}{2}\left(\zeta(2)^2-\zeta(4)\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2-\frac{\pi^4}{90}\right) = \frac{\pi^4}{120}.$$

よって
$$\zeta^\star(2,2) = \zeta(2,2)+\zeta(4) = \frac{\pi^4}{120}+\frac{\pi^4}{90} = \frac{7\pi^4}{360}.$$

例：$\zeta(3,1), \zeta^\star(3,1)$

$\boxed{\zeta(3,1),\ \zeta^\star(3,1)}$

$$
\begin{aligned}
\zeta^\star(2,2) &= \sum_{m \geqq n \geqq 1} \frac{1}{m^2 n^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} \right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(m+n)^2} \right) \right) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{m+2n}{mn^2(m+n)^2} \\
&= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(m+n)^2} + 2 \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{mn(m+n)^2} \\
&= \zeta(2,2) + 2 \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(m+n)^3} + \frac{1}{m(m+n)^3} \right) \\
&= \zeta(2,2) + 4\zeta(3,1).
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \zeta(3,1) = \frac{1}{4}\zeta(4) = \frac{\pi^4}{360}, \qquad \zeta^\star(3,1) = \zeta(3,1) + \zeta(4) = \frac{\pi^4}{72}.
$$

多重ゼータ値の線形関係式

上で見たように，多重ゼータ値の間には数多くの関係式がある．

$k \geqq 2$ に対して $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $\mathcal{Z}_k \subset \mathbb{R}$ を次で定義する：

$$\mathcal{Z}_k = \mathrm{span}_{\mathbb{Q}} \left\{ \zeta(k_1, \ldots, k_n) \;\middle|\; \begin{array}{l} k_1 \geqq 2,\, k_2, \ldots, k_n \geqq 1,\, n \geqq 1, \\ k_1 + \cdots + k_n = k \end{array} \right\}.$$

このような $(k_1, \ldots, k_n)$ の個数は 2^{k-2} 個．

予想 (Zagier)

数列 $(d_k)_{k \geqq 2}$ を $d_2 = d_3 = d_4 = 1,\, d_k = d_{k-2} + d_{k-3}$ $(k \geqq 5)$ で定めると，

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k = d_k.$$

$d_k \fallingdotseq 0.41149 \cdot 1.3247^k \ll 2^{k-2}$ なので，この予想は多重ゼータ値の間に数多くの関係式が存在することを意味している．
寺杣友秀，Deligne-Goncharov は代数幾何を用いて $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k \leqq d_k$ であることを証明した．

π べきの有理数倍になる多重ゼータ値

$\zeta(2k)=\zeta^\star(2k)\in\mathbb{Q}\pi^{2k}$ であることはよく知られている．
上で見たように，$\zeta(2,2),\zeta^\star(2,2)\in\mathbb{Q}\pi^4$ である．
これらの一般化として，次が知られている：

命題

$$\zeta(\underbrace{2k,\ldots,2k}_{n}),\zeta^\star(\underbrace{2k,\ldots,2k}_{n})\in\mathbb{Q}\pi^{2nk}.$$

上で見たように，$\zeta(3,1),\zeta^\star(3,1)\in\mathbb{Q}\pi^4$ である．
これの一般化として，次が知られている：

命題

$$\zeta(\underbrace{3,1,\ldots,3,1}_{2n}),\zeta^\star(\underbrace{3,1,\ldots,3,1}_{2n})\in\mathbb{Q}\pi^{4n}.$$

Bowman-Bradley の定理

$$\zeta(\underbrace{2,\ldots,2}_{m}) \in \mathbb{Q}\pi^{2m}, \quad \zeta(\underbrace{3,1,\ldots,3,1}_{2n}) \in \mathbb{Q}\pi^{4n}.$$

これらの共通の一般化として，Bowman-Bradley は次を示した：

定理 (Bowman-Bradley)

$\underbrace{2,\ldots,2}_{m}$ と $\underbrace{3,1,\ldots,3,1}_{2n}$ を「シャッフル」して得られるすべての index に対する多重ゼータ値の和は $\mathbb{Q}\pi^{2m+4n}$ に属する．

例えば $m=2$, $n=1$ のとき，

$$\begin{aligned}\zeta(2,2,3,1)+\zeta(2,3,2,1)+\zeta(2,3,1,2)&\\ +\zeta(3,2,2,1)+\zeta(3,2,1,2)+\zeta(3,1,2,2)&\in \mathbb{Q}\pi^{8}.\end{aligned}$$

主定理

Bowman-Bradley の定理の等号つき多重ゼータ値版が主定理である：

定理（近藤宏樹・S・田中立志）

$\underbrace{2,\ldots,2}_{m}$ と $\underbrace{3,1,\ldots,3,1}_{2n}$ を「シャッフル」して得られるすべての index に対する等号つき多重ゼータ値の和は $\mathbb{Q}\pi^{2m+4n}$ に属する.

注：

- $m=0,1$ の場合は宗田修一によって示されていた.
- $m=2$ の場合は今冨耕太郎・田中立志・田坂浩二・若林徳子によって示されていた.
- 後に一般の m に対する定理の別証明が田中立志によって与えられた.

証明の概略

$\underbrace{2,\dots,2}_{m}$ と $\underbrace{3,1,\dots,3,1}_{2n}$ を「シャッフル」して得られるすべての index に対する多重ゼータ値の和，等号つき多重ゼータ値の和をそれぞれ $S(m,n)$, $S^\star(m,n)$ と書く．
BB より $S(m,n)\in\mathbb{Q}\pi^{2m+4n}$. 示すべきことは $S^\star(m,n)\in\mathbb{Q}\pi^{2m+4n}$.
非可換多項式に対するある等式を組合せ論的に証明することで

$$S^\star(0,n)=\sum_{j+k=n}S(0,j)\zeta^\star(\underbrace{4,\dots,4}_{k}),$$

$$S^\star(1,n)-2\sum_{j+k=n}S^*(0,j)\zeta(4k+2)=-\sum_{j+k=n}S(1,j)\zeta^\star(\underbrace{4,\dots,4}_{k}),$$

$$\vdots$$

と続く等式を導き，帰納的に定理を証明する．