

正規コンピュータの漸近的裾依存性

齋藤新悟

九州大学大学院数理学研究院

2011/01/29

近藤宏樹氏（日新火災海上保険株式会社）
谷口説男氏（九州大学大学院数理学研究院）
との共同研究

コピュラとは

コピュラは確率変数間の依存関係を記述する。

定義

コピュラとは、 $C: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ であって、

$\exists U, V \sim \text{Uniform}(0, 1)$ (独立とは限らない)

$$C(u, v) = P(U \leq u, V \leq v) \quad \forall u, v \in [0, 1].$$

同値な定義

コピュラとは、 $C: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ であって、

- $\forall u, v \in [0, 1] \quad C(u, 0) = C(0, v) = 0, C(u, 1) = u, C(1, v) = v.$
- $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1, 0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$
 $\implies C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \geq 0.$

Skalar の定理 (1) ← 同時分布は周辺分布とコピュラで書ける

(X, Y) : 連続型 (周辺分布関数 F_X, F_Y が連続) 2次元確率変数.

$F_{X,Y}(x, y) := P(X \leq x, Y \leq y)$: 同時分布関数.

このとき, $\exists C_{X,Y}$: コピュラ

$$F_{X,Y}(x, y) = C_{X,Y}(F_X(x), F_Y(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Skalar の定理 (2) ← 周辺分布とコピュラは「独立に」選べる

F_1, F_2 : 連続な 1次元分布関数, C : コピュラ.

このとき, $\exists (X, Y)$: 2次元確率変数

- 周辺分布関数は F_1, F_2 .
- $C_{X,Y} = C$.

コピュラの例

$$F_{X,Y}(x, y) = C_{X,Y}(F_X(x), F_Y(y)).$$

- 積コピュラ $C(u, v) = uv$.
← 独立な X, Y に対応.
- Fréchet-Hoeffding 上界 $C(u, v) = \min\{u, v\}$.
← $Y = \varphi(X)$ (φ は単調増加) に対応.
- Fréchet-Hoeffding 下界 $C(u, v) = \max\{u + v - 1, 0\}$.
← $Y = \varphi(X)$ (φ は単調減少) に対応.
- 正規コピュラ $C_\rho = C_{X,Y}$ ($-1 < \rho < 1$).
ただし $(X, Y) \sim N\left((0, 0), \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$.

裾依存性とコピュラ

(X, Y) : 連続型 2 次元確率変数.

このとき, $F_X(X), F_Y(Y) \sim \text{Uniform}(0, 1)$.

定義

- (X, Y) の裾依存度 :

$$\lambda_{X,Y}(t) := P(F_Y(Y) > t \mid F_X(X) > t) \quad (0 < t < 1).$$

- (X, Y) の裾依存係数 :

$$\lambda_{X,Y} := \lim_{t \nearrow 1} \lambda_{X,Y}(t).$$

命題

$$\lambda_{X,Y}(t) = \frac{1 - 2t + C_{X,Y}(t, t)}{1 - t}.$$

特に, $\lambda_{X,Y}(t), \lambda_{X,Y}$ は $C_{X,Y}$ のみによって決まる.

裾依存度の例

$$\lambda_{X,Y}(t) = P(F_Y(Y) > t \mid F_X(X) > t) \rightarrow \lambda_{X,Y} (t \nearrow 1).$$

- 積コピュラ $C(u, v) = uv$
 $\implies \lambda(t) = 1 - t, \lambda = 0.$
- Fréchet-Hoeffding 上界 $C(u, v) = \min\{u, v\}$
 $\implies \lambda(t) = 1, \lambda = 1.$
- Fréchet-Hoeffding 下界 $C(u, v) = \max\{u + v - 1, 0\}$
 $\implies \lambda(t) = 0 \left(t \geq \frac{1}{2} \right), \lambda = 0.$
- 正規コピュラ C_ρ ($-1 < \rho < 1$)
 $\implies \lambda = 0.$

Fréchet-Hoeffding 下界, 正規コピュラの裾依存性は積コピュラ (独立性) と同じ?

裾依存度の比較

	積コピュラ	FH 下界	正規コピュラ ($\rho = 0.5$)
$t = 0.8$	0.2000	0.0000	0.4358
$t = 0.9$	0.1000	0.0000	0.3240
$t = 0.95$	0.0500	0.0000	0.2438
$t = 0.99$	0.0100	0.0000	0.1294
$t = 0.995$	0.0050	0.0000	0.0993
$t = 0.999$	0.0010	0.0000	0.0543

→ 極限值はすべて 0 でも漸近挙動は異なる.

漸近挙動

- 積コピュラ : $\lambda(t) = 1 - t$.
- FH 下界 : $\lambda(t) = 0$.
- 正規コピュラ :

主定理

正規コピュラ C_ρ について

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= \sqrt{\frac{(1+\rho)^3}{2\pi(1-\rho)}} e^{-\frac{1-\rho}{2(1+\rho)}s^2} \left(s^{-1} - \frac{1+2\rho-\rho^2}{1-\rho} s^{-3} + O(s^{-5}) \right) \\ &\sim (4\pi)^{-\frac{\rho}{1+\rho}} \sqrt{\frac{(1+\rho)^3}{1-\rho}} (1-t)^{\frac{1-\rho}{1+\rho}} (-\log(1-t))^{-\frac{\rho}{1+\rho}}.\end{aligned}$$

ただし $t = \Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^s e^{-x^2/2} dx$ (標準正規分布の分布関数).