正規コピュラの漸近的裾依存性

斎藤新悟

九州大学大学院数理学研究院

2011/01/27

近藤宏樹氏（日新火災海上保険株式会社）
谷口説男氏（九州大学大学院数理学研究院）
との共同研究

リスク統合とコピュラ

2 種類の保険契約を保持している保険会社の保険引受リスク評価の手順：

(1) 各種目の保険金の額を確率変数 X, Y を用いてモデル化（分布形を指定し，過去のデータからパラメータを推定）.

(2) これらを統合した $Z = X + Y$ の分布を分析する.
$\longrightarrow$ X, Y の分布だけでなく，それらの依存関係も必要.

従来のリスク量の指標：標準偏差 $\sigma(Z)$

$\sigma(X), \sigma(Y)$ から $\sigma(Z)$ を求めるには，相関係数 $\rho(X, Y)$ が分かればよい：

$$\sigma(Z)^2 = \sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2 + 2\sigma(X)\sigma(Y)\rho(X, Y).$$

リスク統合とコピュラ

近年のリスク量の指標：

Value at Risk (VaR): $P(Z \geqq \mathrm{VaR}) = 0.005$.

Tail Value at Risk (TVaR): $\mathrm{TVaR} = E[Z|Z \geqq \mathrm{VaR}]$ ($\geqq \mathrm{VaR}$).

$\mathrm{VaR}(Z)$ を $\mathrm{VaR}(X)$, $\mathrm{VaR}(Y)$, $\rho(X, Y)$ から求めることはできない（TVaR でも同様）.

$\longrightarrow$ X, Y の依存関係をより詳しく記述する必要がある.

$\longrightarrow$ コピュラの利用.

依存関係の中でも，特に高額保険金に対応する裾の依存関係が重要.

$\longrightarrow$ 正規コピュラは裾依存性を捉えられないといわれる.

$\longrightarrow$ 実は，実務上は裾依存性を捉えられるといえるのではないか？

コピュラとは

コピュラは確率変数間の依存関係を記述する.

定義

コピュラとは, $C\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ であって,

$$\exists U, V \sim \mathrm{Uniform}(0,1)\ (\text{独立とは限らない})$$

$$C(u,v) = P(U \leqq u,\ V \leqq v) \quad \forall u, v \in [0,1].$$

同値な定義

コピュラとは, $C\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ であって,

- $\forall u, v \in [0,1] \quad C(u,0) = C(0,v) = 0,\ C(u,1) = u,\ C(1,v) = v.$
- $0 \leqq u_1 \leqq u_2 \leqq 1,\ 0 \leqq v_1 \leqq v_2 \leqq 1$
  $$\Longrightarrow C(u_2,v_2) - C(u_1,v_2) - C(u_2,v_1) + C(u_1,v_1) \geqq 0.$$

Sklar の定理

Sklar の定理 (1) ← 同時分布は周辺分布とコピュラで書ける

(X,Y)：連続型（周辺分布関数 F_X, F_Y が連続）2 次元確率変数.
$F_{X,Y}(x,y) := P(X \leqq x,\ Y \leqq y)$：同時分布関数.
このとき，$\exists! C_{X,Y}$：コピュラ

$$F_{X,Y}(x,y) = C_{X,Y}\big(F_X(x), F_Y(y)\big) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}.$$

Sklar の定理 (2) ← 周辺分布とコピュラは「独立に」選べる

F_1, F_2：連続な 1 次元分布関数，C：コピュラ.
このとき，$\exists(X,Y)$：2 次元確率変数

- 周辺分布関数は F_1, F_2.
- $C_{X,Y} = C$.

コピュラの例

$$F_{X,Y}(x,y) = C_{X,Y}\big(F_X(x), F_Y(y)\big).$$

- 積コピュラ $C(u,v) = uv$.
  $\longleftarrow$ 独立な X, Y に対応.
- Fréchet-Hoeffding 上界 $C(u,v) = \min\{u,v\}$.
  $\longleftarrow$ $Y = \varphi(X)$（φ は単調増加）に対応.
- Fréchet-Hoeffding 下界 $C(u,v) = \max\{u+v-1, 0\}$.
  $\longleftarrow$ $Y = \varphi(X)$（φ は単調減少）に対応.
- 正規コピュラ $C_\rho = C_{X,Y}$ $(-1 < \rho < 1)$.
  ただし $(X,Y) \sim N\left((0,0), \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$.

裾依存性とコピュラ

(X, Y)：連続型 2 次元確率変数.
このとき，$F_X(X), F_Y(Y) \sim \mathrm{Uniform}(0,1)$.

定義

- (X, Y) の裾依存度：

$$\lambda_{X,Y}(t) := P\big(F_Y(Y) > t \,\big|\, F_X(X) > t\big) \quad (0 < t < 1).$$

- (X, Y) の裾依存係数：

$$\lambda_{X,Y} := \lim_{t \nearrow 1} \lambda_{X,Y}(t).$$

命題

$$\lambda_{X,Y}(t) = \frac{1 - 2t + C_{X,Y}(t,t)}{1-t}.$$

特に，$\lambda_{X,Y}(t)$, $\lambda_{X,Y}$ は $C_{X,Y}$ のみによって決まる.

裾依存度の例

$$\lambda_{X,Y}(t) = P\big(F_Y(Y) > t \mid F_X(X) > t\big) \to \lambda_{X,Y} \ (t \nearrow 1).$$

- 積コピュラ $C(u,v) = uv$
  $\implies \lambda(t) = 1 - t,\ \lambda = 0.$
- Fréchet-Hoeffding 上界 $C(u,v) = \min\{u, v\}$
  $\implies \lambda(t) = 1,\ \lambda = 1.$
- Fréchet-Hoeffding 下界 $C(u,v) = \max\{u + v - 1, 0\}$
  $\implies \lambda(t) = 0 \left(t \geqq \dfrac{1}{2}\right),\ \lambda = 0.$
- 正規コピュラ $C_\rho\ (-1 < \rho < 1)$
  $\implies \lambda = 0.$

Fréchet-Hoeffding 下界，正規コピュラの裾依存性は積コピュラ（独立性）と同じ？

裾依存度の比較

	積コピュラ	FH 下界	正規コピュラ ($\rho = 0.5$)
$t = 0.8$	0.2000	0.0000	0.4358
$t = 0.9$	0.1000	0.0000	0.3240
$t = 0.95$	0.0500	0.0000	0.2438
$t = 0.99$	0.0100	0.0000	0.1294
$t = 0.995$	0.0050	0.0000	0.0993
$t = 0.999$	0.0010	0.0000	0.0543

$\longrightarrow$ 極限値はすべて 0 でも漸近挙動は異なる.

漸近挙動

- 積コピュラ：$\lambda(t) = 1 - t.$
- FH 下界：$\lambda(t) = 0.$
- 正規コピュラ：

主定理

正規コピュラ C_ρ について

$$\lambda(t) = \sqrt{\frac{(1+\rho)^3}{2\pi(1-\rho)}}\, e^{-\frac{1-\rho}{2(1+\rho)}s^2} \left(s^{-1} - \frac{1+2\rho-\rho^2}{1-\rho} s^{-3} + O(s^{-5}) \right)$$

$$\sim (4\pi)^{-\frac{\rho}{1+\rho}} \sqrt{\frac{(1+\rho)^3}{1-\rho}} (1-t)^{\frac{1-\rho}{1+\rho}} \left(-\log(1-t) \right)^{-\frac{\rho}{1+\rho}}.$$

ただし $t = \Phi(s) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{s} e^{-x^2/2}\, dx$（標準正規分布の分布関数）.

主定理の証明の概略

主定理

$$\lambda(t) = \sqrt{\frac{(1+\rho)^3}{2\pi(1-\rho)}}\, e^{-\frac{1-\rho}{2(1+\rho)}s^2}\left(s^{-1} - \frac{1+2\rho-\rho^2}{1-\rho}s^{-3} + O(s^{-5})\right).$$

$(X, Y) \sim N\left((0,0), \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$ とする.

$0 < t < 1$ とし，$s := \Phi^{-1}(t)$ とおくと，$t \nearrow 1$ のとき $s \nearrow \infty$ で,

$$\lambda(t) = P\big(\Phi(Y) > t \,\big|\, \Phi(X) > t\big) = \frac{P(X > s,\ Y > s)}{P(X > s)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_s^\infty \int_s^\infty \exp\left(-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}\right) dx\, dy}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_s^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx} =: \frac{A}{B}.$$

分母 B の評価

$$B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_s^\infty e^{-x^2/2}\, dx.$$

$\boxed{\text{部分積分}}$

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\, B &= -\int_s^\infty x^{-1}(e^{-x^2/2})'\, dx \\
&= -\left[x^{-1}e^{-x^2/2}\right]_s^\infty + \int_s^\infty (-x^{-2})e^{-x^2/2}\, dx \\
&= s^{-1}e^{-s^2/2} + \int_s^\infty x^{-3}(e^{-x^2/2})'\, dx \\
&= s^{-1}e^{-s^2/2} + \left[x^{-3}e^{-x^2/2}\right]_s^\infty - \int_s^\infty (-3x^{-4})e^{-x^2/2}\, dx \\
&= (s^{-1} - s^{-3})e^{-s^2/2} - \int_s^\infty 3x^{-5}(e^{-x^2/2})'\, dx \\
&= \cdots .
\end{aligned}$$

分子 A の評価：STEP 1 回転

$$A = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_s^\infty \int_s^\infty \exp\left(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right) dx\, dy.$$

STEP 1：回転

$$x^2 - 2\rho xy + y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\rho & 0 \\ 0 & 1+\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

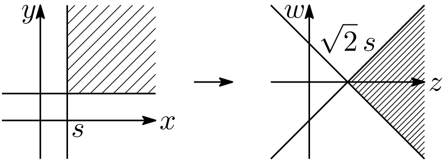
$$= \begin{pmatrix} z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\rho & 0 \\ 0 & 1+\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}.$$

ただし $z = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$, $w = \dfrac{-x+y}{\sqrt{2}}$.

分子 A の評価：STEP 1 回転

変数変換 $z = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$, $w = \dfrac{-x+y}{\sqrt{2}}$ により,

$$
\begin{aligned}
2\pi\sqrt{1-\rho^2}\,A &= \int_s^\infty \int_s^\infty \exp\left(-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}\right) dx\,dy \\
&= \iint_{z+w \geqq \sqrt{2}\,s,\ z-w \geqq \sqrt{2}\,s} \exp\left(-\frac{(1-\rho)z^2+(1+\rho)w^2}{2(1-\rho^2)}\right) dz\,dw \\
&= 2\iint_{z-w \geqq \sqrt{2}\,s,\ w \geqq 0} \exp\left(-\frac{z^2}{2(1+\rho)}\right) \exp\left(-\frac{w^2}{2(1-\rho)}\right) dz\,dw \\
&= 2\int_0^\infty \left(\int_{w+\sqrt{2}\,s}^\infty \exp\left(-\frac{z^2}{2(1+\rho)}\right) dz\right) \exp\left(-\frac{w^2}{2(1-\rho)}\right) dw.
\end{aligned}
$$



$\boxed{\text{STEP 2：内側の積分を部分積分で評価}}$（分母 B の評価と同様）

$$\int_{w+\sqrt{2}\,s}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2(1+\rho)}\right) dz$$
$$= \left(\frac{1+\rho}{w+\sqrt{2}\,s} - \frac{(1+\rho)^2}{(w+\sqrt{2}\,s)^3} + \cdots\right) \exp\left(-\frac{(w+\sqrt{2}\,s)^2}{2(1+\rho)}\right).$$

$$\therefore \pi\sqrt{1-\rho^2}\,A = \int_0^{\infty} \left(\frac{1+\rho}{w+\sqrt{2}\,s} - \frac{(1+\rho)^2}{(w+\sqrt{2}\,s)^3} + \cdots\right)$$
$$\times \exp\left(-\frac{(w+\sqrt{2}\,s)^2}{2(1+\rho)}\right) \exp\left(-\frac{w^2}{2(1-\rho)}\right) dw$$

$$= e^{-\frac{s^2}{2}} \int_0^{\infty} \left(\frac{1+\rho}{w+\sqrt{2}\,s} - \frac{(1+\rho)^2}{(w+\sqrt{2}\,s)^3} + \cdots\right) \exp\left(-\frac{\left(w+\frac{1-\rho}{\sqrt{2}}s\right)^2}{1-\rho^2}\right) dw.$$

STEP 3：外側の積分を部分積分で評価

$$\int_0^\infty \left(\frac{1+\rho}{w+\sqrt{2}\,s} - \frac{(1+\rho)^2}{(w+\sqrt{2}\,s)^3} + \cdots \right) \exp\left(-\frac{\left(w+\frac{1-\rho}{\sqrt{2}}s\right)^2}{1-\rho^2} \right) dw$$

の各項を $\displaystyle\int_{as}^\infty (w+bs)^{-n} e^{-w^2/2}\,dw$ $(a, b > 0,\ n \in \mathbb{N})$ の形に変数変換.

$I_{m,n} := \displaystyle\int_{as}^\infty w^{-m}(w+bs)^{-n} e^{-w^2/2}\,dw$ とおくと,

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= -\int_{as}^\infty w^{-m-1}(w+bs)^{-n}(e^{-w^2/2})'\,dw \\ &= -\left[w^{-m-1}(w+bs)^{-n} e^{-w^2/2} \right]_{as}^\infty + \int_{as}^\infty \Big((-m-1)w^{-m-2}(w+bs)^{-n} \\ &\qquad + w^{-m-1}(-n)(w+bs)^{-n-1} \Big) e^{-w^2/2}\,dw \\ &= a^{-m-1}(a+b)^{-n} s^{-m-n-1} e^{-a^2s^2/2} - (m+1)I_{m+2,n} - nI_{m+1,n+1}. \end{aligned}$$

まとめ

- 相関 ρ の正規コピュラ C_ρ の裾依存度 $\lambda(t)$ は $(1-t)^{\frac{1-\rho}{1+\rho}}$ のオーダー．これは積コピュラのオーダー $1-t$ とは（$\rho \neq 0$ の場合は）異なる．
- $\lambda(0.995)$ は積コピュラで 0.0050，正規コピュラ $C_{0.5}$ で 0.0993.
  $\longrightarrow$ 無視できない差がある．
  $\longrightarrow$ 実務上は正規コピュラもある程度裾依存性を捉えられる．