典型的連続関数の結び目点

斎藤新悟（九大数理）

本講演で述べる結果は，David Preiss (University of Warwick) との共同研究である．

$I=[0,1]$ とし，I 上の実数値連続関数全体のなす線形空間 $C(I)$ に上限ノルムを入れた Banach 空間を考える．本講演では，典型的な $f\in C(I)$ の性質について考察する．ここで，**典型的** (typical, generic) な $f\in C(I)$ が性質 P を持つとは，性質 P を持たないような $f\in C(I)$ 全体の集合がやせている（Baire の第 1 類集合である）ことをいう．

典型的な $f\in C(I)$ の性質としては，Banach, Mazurkiewicz によって 1931 年に独立に証明された定理「典型的な $f\in C(I)$ はいたるところ微分不可能である」がよく知られている．したがって，典型的な $f\in C(I)$ に対してその導関数を考えることはできないが，代わりに Dini 微分を考えることができる：

定義　$f\in C(I)$ の $x\in I$ における **Dini 微分** (Dini derivative) とは，

$$D^+f(x)=\limsup_{h\downarrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\qquad D^-f(x)=\limsup_{h\uparrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$
$$D_+f(x)=\liminf_{h\downarrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\qquad D_-f(x)=\liminf_{h\uparrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

で定義される $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ の元をいう．ただし，$0\in I$ では $D^+f(0)$, $D_+f(0)$ のみ，$1\in I$ では $D^-f(1)$, $D_-f(1)$ のみ定義する．

典型的な $f\in C(I)$ の Dini 微分については次の定理が知られている：

定理 (Jarník)　典型的な $f\in C(I)$ に対して，ほとんどすべての $x\in I$ において

$$D^+f(x)=D^-f(x)=\infty,\qquad D_+f(x)=D_-f(x)=-\infty$$

が成立する．

このような点は，f が「最も微分不可能」な点と考えられ，結び目点と呼ばれる：

定義　$f\in C(I)$ とする．$x\in I$ が f の**結び目点** (knot point) であるとは，

$$D^+f(x)=D^-f(x)=\infty,\qquad D_+f(x)=D_-f(x)=-\infty$$

が成立することをいう．$f\in C(I)$ の結び目点**でない** I の点全体の集合を $N(f)$ と書く．

なお，I の端点においては定義できる 2 つの Dini 微分がそれぞれ ∞, $-\infty$ となるときに結び目点であるという．例えば，$0 \in I$ が $f \in C(I)$ の結び目点であるとは $D^+f(0) = \infty$, $D_+f(0) = -\infty$ が成立するということである．

記号 $N(f)$ を用いると，Jarník の定理は「典型的な $f \in C(I)$ に対して $N(f)$ は零集合である」と言い換えられる．Jarník の定理の拡張として，どのような意味において「典型的な $f \in C(I)$ に対して $N(f)$ は小さい」と言えるかという問題が考えられる．この問題は Preiss, Zajíček によって完全な特徴づけが得られた．この定理を述べるために，I の閉部分集合全体（すなわちコンパクト部分集合全体）の集合を $\mathcal{K}$ と書き，$\mathcal{K}$ に Hausdorff 距離を導入する．Hausdorff 距離によって，$\mathcal{K}$ はコンパクト距離空間になることが知られている．

定理 (Preiss, Zajíček) $\mathcal{I}$ を I 上の σ イデアルとする．このとき，典型的な $f \in C(I)$ に対して $N(f) \in \mathcal{I}$ が成立するための必要十分条件は，典型的な $K \in \mathcal{K}$ が $\mathcal{I}$ に属すること（すなわち $\mathcal{K} \setminus \mathcal{I}$ が $\mathcal{K}$ の中でやせていること）である．

この定理を，σ イデアルとは限らない一般の I の部分集合族に拡張したものが本講演の主定理である：

定理 (Preiss, S.) $\mathcal{S}$ を I の部分集合族とする．このとき，典型的な $f \in C(I)$ に対して $N(f) \in \mathcal{S}$ が成立するための必要十分条件は，典型的な $(K_n) \in \mathcal{K}^{\mathbb{N}}$ に対して $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \in \mathcal{S}$ が成立すること（すなわち $\left\{(K_n) \in \mathcal{K}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \notin \mathcal{S}\right\}$ が $\mathcal{K}^{\mathbb{N}}$ の中でやせていること）である．ただし，$\mathcal{K}^{\mathbb{N}}$ は $\mathcal{K}$ の可算無限個の直積であり，直積位相を導入している．