典型的連続関数の結び目点

斎藤新悟
九州大学大学院数理学研究院

（David Preiss（Warwick大学）との共同研究）

$C([0,1]) := \{f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f$:連続$\}$.

典型的な $f \in C([0,1])$ が性質 P を持つ($\forall^* f\ \ P$ と書く)

$\iff$ 性質 P を持たない f 全体の集合がやせている.

Banach, Mazurkiewicz:$\forall^* f\ \ f$ はいたるところ微分不可能.

微分係数の代わりに Dini 微分を考える.

$$D^+ f(x) := \limsup_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ など 4 つ.

Jarník:$\forall^* f$ ほとんどすべての $x \in [0,1]$ に対して

$$D^+ f(x) = D^- f(x) = \infty,\ D_+ f(x) = D_- f(x) = -\infty.$$

このような点を f の結び目点と呼ぶ.

結び目点でない点全体の集合を $N(f) \subset [0,1]$ と書く.

Jarník:$\forall^* f\ \ N(f)$ は Lebesgue 零集合.

Preiss, Zajíček:$\forall^* f$ に対して $N(f)$ の小ささを特徴づける.

(i.e. $\forall^* f\ \ N(f) \in \mathcal{I}$ となる $[0,1]$ 上の σ イデアル $\mathcal{I}$ を特徴づける.)

Preiss, S.:$\forall^* f$ に対して $N(f)$ が持つ性質を特徴づける.

(i.e. $\forall^* f\ \ N(f) \in \mathcal{S}$ となる $[0,1]$ の部分集合族 $\mathcal{S}$ を特徴づける.)