

支払備金に関する Mack の公式の一般化

斎藤新悟（九大数理）

0 はじめに

ここで述べる研究成果は、筆者が日新火災海上保険株式会社と九州大学大学院数理学研究院との共同研究に携わる中で得たものである。

また、紙数の都合上、定理や命題などの正確な主張を省いた箇所がある。詳しくは [3, 4] を参照されたい。

1 支払備金とは

損害保険業においては、事故が発生してすぐにそれが保険会社に報告される訳ではなく、また報告されてから保険金の額が確定し、それが支払われるまでにも相当の時間がかかることが多い。そのため各年度末の時点では、その年度に発生した事故に対して支払うべき保険金の総額は未知であり、未払いの保険金の額を推定しなければならない。このような既発生事故に対する保険金のうち、将来支払うために積み立てておく金額を支払備金 (claims reserve) という。

過去 n 年間の支払保険金を次のような表にまとめたものがランオフ三角形 (run-off triangle) である：

		経過年数 j				
		1	2	...	$n-1$	n
事故年度 i	1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$...	$C_{1,n-1}$	$C_{1,n}$
	2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$...	$C_{2,n-1}$	
	⋮	⋮	⋮	⋮		
	$n-1$	$C_{n-1,1}$	$C_{n-1,2}$			
	n	$C_{n,1}$				

$C_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, n$) は事故年度 i 、経過年数 j における累積支払保険金を表しており、表に書かれた $C_{i,j}$ ($i + j \leq n + 1$) が既知である。

ここで簡単のため、各年度の事故は高々 n 年以内に保険金の支払が完了すると仮定する。すなわち、 $i = 1, \dots, n$ に対して $C_{i,n}$ は事故年度 i の事故に対する最終支払保険金である。このとき支払備金は

$$R_{\text{total}} = \sum_{i=2}^n (C_{i,n} - C_{i,n+1-i}) = (C_{2,n} - C_{2,n-1}) + (C_{3,n} - C_{3,n-2}) + \dots + (C_{n,n} - C_{n,1})$$

であり，次年度に支払う保険金は

$$\begin{aligned} R_{\text{next year}} &= \sum_{i=2}^n (C_{i,n+2-i} - C_{i,n+1-i}) \\ &= (C_{2,n} - C_{2,n-1}) + (C_{3,n-1} - C_{3,n-2}) + \cdots + (C_{n,2} - C_{n,1}) \end{aligned}$$

である．

2 支払備金の点推定：チェーンラダー法

チェーンラダー法 (chain-ladder method) は古典的ではあるが，現在でも実務において広く用いられている支払備金の点推定方法である．上で述べたように支払備金は $C_{i,j}$ の形で表されるので， $i+j \geq n+2$ に対する $C_{i,j}$ の推定量 $\hat{C}_{i,j}$ を求めればよい．

チェーンラダー法においては，経過年数が j から $j+1$ になる際に累積支払保険金は事故年度によらず定数 f_j 倍となると考える．すなわち理想的には $C_{i,j+1} = C_{i,j} f_j$ ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n-1$) であり，両辺のずれは誤差に起因するとみなす．

各 $j = 1, \dots, n-1$ に対して， $C_{i,j+1}/C_{i,j}$ の値が既知であるのは $i = 1, \dots, n-j$ のときなので f_j を

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}}$$

で推定し，それを用いて $i+j \geq n+2$ のとき

$$\hat{C}_{i,j} = C_{i,n+1-i} \hat{f}_{n+1-i} \cdots \hat{f}_{j-1}$$

で $C_{i,j}$ を点推定する．

3 Mack モデルと支払備金の区間推定

3.1 Mack モデル

チェーンラダー法は考え出された当初は単なる計算手法であったが，現在までに多くの確率モデルによって正当化されている．その中の 1 つに Mack [1, 2] が考案した Mack モデルと呼ばれるものがある．

$C_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, n$) を確率変数 (正確には 2 乗可積分な確率変数) と考え，これらが定義されている確率空間を (Ω, \mathcal{F}, P) とする． $i, j = 1, \dots, n$ に対して $C_{i,1}, \dots, C_{i,j}$ が生成する σ 加法族を $\mathcal{G}_{i,j}$ と書くと，Mack モデルの仮定は次の通りである：

仮定 1 $\mathcal{G}_{1,n}, \dots, \mathcal{G}_{n,n}$ は独立である (事故年度に関する独立性)．

仮定 2 各 $j = 1, \dots, n-1$ に対してある正の定数 f_j が存在して， $i = 1, \dots, n$ に対して次が成立する：

$$E[C_{i,j+1} | \mathcal{G}_{i,j}] = C_{i,j} f_j .$$

仮定 3 各 $j = 1, \dots, n - 1$ に対してある正の定数 v_j が存在して, $i = 1, \dots, n$ に対して次が成立する:

$$V(C_{i,j+1}|\mathcal{G}_{i,j}) = C_{i,j}v_j.$$

ただし, $V(C_{i,j+1}|\mathcal{G}_{i,j})$ は条件つき分散を表しており,

$$\begin{aligned} V(C_{i,j+1}|\mathcal{G}_{i,j}) &= E[(C_{i,j+1} - E[C_{i,j+1}|\mathcal{G}_{i,j}])^2|\mathcal{G}_{i,j}] \\ &= E[C_{i,j+1}^2|\mathcal{G}_{i,j}] - E[C_{i,j+1}|\mathcal{G}_{i,j}]^2 \end{aligned}$$

である.

3.2 Mack モデルによるチェーンラダー法の正当化

Mack は Mack モデルに基づいて次のようにチェーンラダー法の正当化を行った:

命題 チェーンラダー法による f_j の推定量

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}} = \sum_{i=1}^{n-j} \left(\frac{C_{i,j}}{\sum_{i'=1}^{n-j} C_{i',j}} \cdot \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \right)$$

は f_j の不偏推定量であり, $V(\hat{f}_j)$ は同様の推定量の中で最小となる (詳細省略).

命題 $i + j \geq n + 2$ のとき,

$$E[C_{i,j}|\mathcal{D}] = C_{i,n+1-i}f_{n+1-i} \cdots f_{j-1}$$

が成立し, チェーンラダー法による $C_{i,j}$ の推定量

$$\hat{C}_{i,j} = C_{i,n+1-i}\hat{f}_{n+1-i} \cdots \hat{f}_{j-1}$$

は $E[\hat{C}_{i,j}] = E[C_{i,j}]$ を満たす. ここで, \mathcal{D} は $i + j \leq n + 1$ なる $C_{i,j}$ が生成する σ 加法族である.

3.3 Mack モデルによる支払備金の区間推定: Mack の公式

Mack はさらに, Mack モデルに基づいて支払備金 $R_{\text{total}} = \sum_{i=2}^n (C_{i,n} - C_{i,n+1-i})$ の区間推定を行った. 支払備金の点推定は, チェーンラダー法による $C_{i,j}$ の推定量 $\hat{C}_{i,j}$ を用いて $\hat{R}_{\text{total}} = \sum_{i=2}^n (\hat{C}_{i,n} - C_{i,n+1-i})$ とできる. この推定量の誤差は平均 2 乗誤差 (mean squared error)

$$\text{mse } \hat{R}_{\text{total}} = E[(R_{\text{total}} - \hat{R}_{\text{total}})^2|\mathcal{D}]$$

で測ることができ, これを用いて例えば

$$(\hat{R}_{\text{total}} - 3(\text{mse } \hat{R}_{\text{total}})^{1/2}, \hat{R}_{\text{total}} + 3(\text{mse } \hat{R}_{\text{total}})^{1/2})$$

を R_{total} の 95% 信頼区間とみなすことができる.

次が [1, 2] の主定理である:

定理 (Mack [1, 2]) 仮定 1, 2, 3 の下で, $\text{mse } \hat{R}_{\text{total}}$ は次の式で推定できる (式省略).

4 Mack の公式の一般化

この節では本講演の主定理について述べる．主定理は，前節で述べた Mack の公式を 2 つの点で一般化している．

第 1 点は，実数 α を任意に取って固定し，前節の仮定 3 を次の仮定 3' で置き換えるという点である：

仮定 3' 各 $j = 1, \dots, n-1$ に対してある正の定数 v_j が存在して， $i = 1, \dots, n$ に対して次が成立する：

$$V(C_{i,j+1} | \mathcal{G}_{i,j}) = C_{i,j}^\alpha v_j .$$

仮定 3 は $\alpha = 1$ の場合に相当する． $\alpha = 1$ はチェーンラダー法による f_j の推定量 \hat{f}_j を導く唯一の値であるが，2 次の量である（条件つき）分散が 1 次の量である $C_{i,j}$ に比例するという仮定であるため，必ずしも自然であるとは言いがたい．

第 2 点は，平均 2 乗誤差を求める対象を Mack の場合よりはるかに広げたという点である． $i = 1, \dots, n$ に対して $n+1-i \leq j_i \leq k_i \leq n$ なる整数 j_i, k_i が与えられているとし，

$$S = \sum_{i=1}^n (C_{i,k_i} - C_{i,j_i})$$

とおく．

主定理 (S. [3]) 仮定 1, 2, 3' の下で，上の S に対して $\text{mse} \hat{S}$ は次の式で推定できる（式省略）．

これによって， R_{total} だけでなく $R_{\text{next year}}$ も区間推定できる．

参考文献

- [1] T. Mack, *Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates*, ASTIN Bulletin, **23** (1993) no. 2, 213–225. <http://www.casact.org/library/astin/vol23no2/213.pdf> からダウンロード可能．
- [2] T. Mack, *Measuring the variability of chain ladder reserve estimates*, Casualty Actuarial Society Forum (1994) Spring, vol. 1, 101–182. <http://www.casact.org/pubs/forum/94spforum/94spf101.pdf> からダウンロード可能．
- [3] S. Saito, *Generalisation of Mack's formula for claims reserving with arbitrary exponents for the variance assumption*, Journal of Math-for-industry, **1** (2009A), 7–15. http://gcoe-mi.jp/publish_list/pub_inner/id:4/cid:9 からダウンロード可能．
- [4] 斎藤新悟 『Mack の公式：支払備金の区間推定』．谷口説男編，プロシーディング「損保数理に現れる確率モデル」—日新火災・九州大学共同研究 2008 年 11 月研究会—，MI レクチャーノート，**13** (2009) . http://gcoe-mi.jp/publish_list/pub_inner/id:2/cid:10 からダウンロード可能．