支払備金に関する Mack の公式の一般化

斎藤新悟

九州大学大学院数理学研究院

（日新火災海上保険株式会社との共同研究に従事する際に得られた結果）

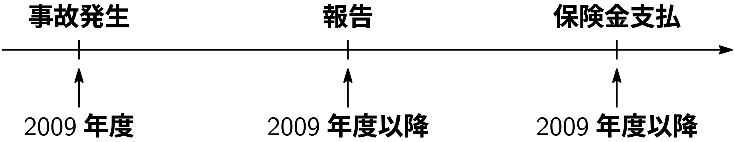
2009/09/26

支払備金とは

- （主に）損害保険会社における概念．
- 2009 年度末には 2009 年度に発生した事故に対する保険金の総額は不明．

その理由：

- 保険金の額が確定していない事故が存在する．
- 保険会社に報告されていない事故が存在する．



支払備金とは

定義：

2009 年度の事故に対する**支払備金**
:= 2009 年度の事故に対する保険金（未知）
− そのうち 2009 年度に支払った保険金

より精密な定義：

2009 年度の事故に対する $\boxed{\text{2010 年度末における}}$ **支払備金**
:= 2009 年度の事故に対する保険金（未知）
− そのうち $\boxed{\text{2010 年度までに}}$ 支払った保険金

ランオフ三角形

ランオフ三角形とはデータを以下のような表にまとめたもの：

	経過年数						
事故年度	1	2	3	4	5	6	7
2002	181	548	605	715	718	722	723
2003	265	761	981	1,038	1,042	1,150	
2004	333	1,011	1,076	1,170	1,313		
2005	288	873	1,106	1,227			
2006	278	844	1,299				
2007	404	1,214					
2008	374						

- 事故年度 2003，経過年数 3 の欄が 981 とは 2003 年度の事故に対して 2005 年度までの支払保険金が 981 ということ．
- 現在は 2008 年度末．

記号

記号：

- ランオフ三角形の大きさを $n \times n$ とする．
- 事故年度 $i = 1, \ldots, n$，経過年数 $j = 1, \ldots, n$ における累積支払保険金を $C_{i,j}$ とする．
- $i + j \leqq n + 1$ に対する $C_{i,j}$ が既知．

設定：

- 仮定：各年度の事故は n 年以内に保険金の支払が完了する．つまり $C_{i,n} =$ 事故年度 i の事故に対する最終保険金．
- 事故年度 i の事故に対する（現時点での）支払備金
  $$= C_{i,n} - C_{i,n+1-i}.$$
- （総）支払備金 $R = \sum_{i=2}^{n}(C_{i,n} - C_{i,n+1-i}) \longleftarrow$ 推定したい．

チェーンラダー法

- 古典的だが現在も実務で広く用いられている．
- 点推定を与える．

$R = \sum_{i=2}^{n}(C_{i,n} - C_{i,n+1-i})$ の推定量 $\widehat{R}$ を求めるには $C_{i,n}$ の推定量 $\widehat{C}_{i,n}$ を求めれば十分．

$$\begin{aligned} \widehat{C}_{i,n} &:= C_{i,n+1-i}\widehat{f}_{n+1-i}\cdots\widehat{f}_{n-1}, \\ \widehat{f}_j &:= \frac{C_{1,j+1} + \cdots + C_{n-j,j+1}}{C_{1,j} + \cdots + C_{n-j,j}}. \end{aligned}$$

理想的には $C_{i,j+1} = C_{i,j}f_j$ であると考え，
$\widehat{f}_j$ で定数 f_j を推定する．
$\widehat{f}_j$ の定義がチェーンラダー法のポイント．
注：同様に $C_{i,j}$ $(i + j \geqq n + 2)$ も推定できる．

問題点：区間推定ではない．

Mack モデル

- $C_{i,j}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上定義された確率変数と考える．
- $\mathcal{D} := \sigma\{C_{i,j} \mid i+j \leqq n+1\}$：現時点での情報量．
- 推定すべきもの：$E[R|\mathcal{D}]$, $E[C_{i,j}|\mathcal{D}]$ $(i+j \geqq n+2)$ など．

仮定

$\mathcal{G}_{i,j} := \sigma\{C_{i,1}, \ldots, C_{i,j}\}$ とおき，次を仮定する：

- $\mathcal{G}_{1,n}, \ldots, \mathcal{G}_{n,n}$：独立（事故年度に関する独立性）．
- $\forall j = 1, \ldots, n-1\ \exists f_j > 0\ \forall i = 1, \ldots, n$
  $$E[C_{i,j+1}|\mathcal{G}_{i,j}] = C_{i,j} f_j.$$
- $\forall j = 1, \ldots, n-1\ \exists v_j > 0\ \forall i = 1, \ldots, n$
  $$V(C_{i,j+1}|\mathcal{G}_{i,j}) = C_{i,j} v_j.$$

ただし $V(C_{i,j+1}|\mathcal{G}_{i,j}) = E\left[(C_{i,j+1} - E[C_{i,j+1}|\mathcal{G}_{i,j}])^2 \middle| \mathcal{G}_{i,j}\right]$.

Mack の結果

1. **点推定について**
   - **チェーンラダー推定量 $\widehat{f}_j$ は f_j の不偏推定量かつ（ある意味での）最良推定量（つまり分散を最小にする）.**
   - $E[\widehat{C}_{i,j}] = E\big[E[C_{i,j}|\mathcal{D}]\big] \ \big(= E[C_{i,j}]\big)$.
   - v_j **は次で推定する：**

$$\widehat{v}_j := \frac{1}{n-j-1}\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \widehat{f}_j\right)^2.$$

$\widehat{v}_j$ **は** v_j **の不偏推定量.**

Mack の結果

2 **区間推定について**

- **平均 2 乗誤差** $\operatorname{mse}\widehat{R} = E\bigl[(R-\widehat{R})^2\big|\mathcal{D}\bigr]$ **を考える．これを用いると例えば 95%信頼区間は** $\bigl(\widehat{R}-3(\operatorname{mse}\widehat{R})^{1/2}, \widehat{R}+3(\operatorname{mse}\widehat{R})^{1/2}\bigr)$ **などで推定できる．**
- $\operatorname{mse}\widehat{R}$ **を次で推定する：**

$$\sum_{i=2}^{n}\left(\widehat{C}_{i,n}^2\sum_{l=n+1-i}^{n-1}\frac{\widehat{v}_l}{\widehat{f}_l^2}\left(\frac{1}{\widehat{C}_{i,l}}+\frac{1}{\sum_{m=1}^{n-l}C_{m,l}}\right)\right)$$
$$+2\sum_{i=2}^{n-1}\widehat{C}_{i,n}\left(\sum_{i'=i+1}^{n}\widehat{C}_{i',n}\right)\left(\sum_{l=n+1-i}^{n-1}\frac{\widehat{v}_l}{\widehat{f}_l^2\sum_{m=1}^{n-l}C_{m,l}}\right).$$

主結果

仮定の拡張：

仮定

- $\mathcal{G}_{1,n}, \ldots, \mathcal{G}_{n,n}$：独立（事故年度に関する独立性）．
- $\forall j = 1, \ldots, n-1 \ \exists f_j > 0 \ \forall i = 1, \ldots, n$
$$E[C_{i,j+1} | \mathcal{G}_{i,j}] = C_{i,j} f_j.$$
- $\forall j = 1, \ldots, n-1 \ \exists v_j > 0 \ \forall i = 1, \ldots, n$
$$V(C_{i,j+1} | \mathcal{G}_{i,j}) = C_{i,j}^{\alpha} v_j.$$

ただし α は任意に固定した実数．

$\alpha = 1$ **の場合が** Mack．

主結果

1. **点推定について**
   - $\widehat{f}_j, \widehat{v}_j$ **は** α **に依存する．**
     チェーンラダーとは異なる．
   - **不偏性・最良性は** Mack **の結果と同様．**
2. **区間推定について**
   - **支払備金** $R = \sum_{i=2}^{n}(C_{i,n} - C_{i,n+1-i})$ **や次年度の支払保険金**

$$\sum_{i=2}^{n}(C_{i,n+2-i} - C_{i,n+1-i})$$

     を含む様々な確率変数の推定量の平均 2 **乗誤差を推定．**
   - **正確には，** $n+1-i \leqq j_i \leqq k_i \leqq n$ **とし**

$$S = \sum_{i=1}^{n}(C_{i,k_i} - C_{i,j_i})$$

     の推定量の平均 2 **乗誤差を推定．**