典型的有界関数の連続点

斎藤新悟（九大数理）

位相空間 X の部分集合 S が**疎** (nowhere dense) であるとは S の閉包が内点を持たないことをいい，S が**やせている** (meagre, first category) とは，S が疎な部分集合の可算個の和集合として表せることをいう．やせた集合の概念は「位相的に小さい」ということの定式化であると考えられるが，$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Q}$ 自身のやせた部分集合であることから，任意の位相空間に対して適切な定式化ではない．完備距離空間においては，Baire のカテゴリー定理によってやせた集合が内点を持たないことが分かるので，定式化として適切であるといえる．

完備距離空間 X の**典型的** (typical, generic) な元 x が性質 P を持つとは，性質 P を持たないような $x \in X$ 全体の集合がやせていることをいう．具体的な X についてその典型的な元の性質を調べるのは興味深い問題であり，X が閉区間 $[0,1]$ 上の実数値連続関数全体のなす線形空間に上限ノルムを入れた Banach 空間 $C([0,1])$ のときは，Banach, Mazurkiewicz による定理「典型的な $f \in C([0,1])$ はいたるところ微分不可能である」に端を発し，今日でも古典的実解析学の主要な分野の 1 つとなっている．

この講演では，より一般に $[0,1]$ 上の実数値有界関数全体のなす線形空間 $\boldsymbol{b}$ に上限ノルムを入れた Banach 空間の線形閉部分空間を X とした場合を考える．特に，このような X の典型的な元 f の連続点全体の集合 $C(f)$ がどれくらい小さいかを考える．

Kostyrko と Šalát は [1] で，典型的な $f \in X$ に対して $C(f)$ が Lebesgue 零集合である（すなわちほとんどいたるところ不連続である）ような X の条件を決定した：

定理 (Kostyrko, Šalát)　X を $\boldsymbol{b}$ の閉部分空間とする．$C(f)$ が Lebesgue 零集合であるような $f \in X$ が存在すれば, 典型的な $f \in X$ に対して $C(f)$ は Lebesgue 零集合である．さらに, $[0,1]$ 上の Lebesgue 測度を μ と書くと, 仮定は $\inf_{f \in X} \mu\bigl(C(f)\bigr) = 0$ に弱められる．

この定理は $C(f)$ が測度論的に小さいかどうかを考察したものであるが，$C(f)$ が位相的に小さいかどうかを考察したものが本講演の主定理である：

定理 (S.)　X を $\boldsymbol{b}$ の閉部分空間とする．$C(f)$ がやせているような $f \in X$ が存在すれば，典型的な $f \in X$ に対して $C(f)$ は疎である（よって特にやせている）．より強く，次が成立する：$[0,1]$ の任意の空でない開集合 U に対して，ある $f \in X$ が存在して $U \setminus C(f)$ は U のやせた部分集合ではないならば，典型的な $f \in X$ に対して $C(f)$ は疎である．

参考文献

[1] P. Kostyrko and T. Šalát, *On the structure of some function space*, Real Anal. Exchange, **10** (1984–85), no. 1, 188–193.

[2] S. Saito, *Continuity Points of Typical Bounded Functions*, to appear in Real Anal. Exchange.