正規コピュラの漸近的裾依存性

斎藤新悟 (九州大学)*

概 要

損害保険において保険種目間の相関を調べる際には，高額の保険金に対応する裾の依存性が重要である．相関をコピュラを用いて考察する場合，裾の依存性はある極限値で表現されることが多い．正規コピュラは扱いが容易なコピュラであるが，この極限値が独立な場合と同じであるため裾の依存性を表現できないとみなされることがある．しかし， 実務上は極限値よりも漸近挙動の方が重要であると考えられ，正規コピュラの漸近挙動は独立な場合とは異なることが分かったので，そのことについて報告する．

本研究は近藤宏樹氏（日新火災海上保険株式会社），谷口説男氏（九州大学大学院数理学研究院）との共同研究である．

1. コピュラとは

定義 1.1 $C\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ であって，次の同値な条件を満たすものを**コピュラ** (copula) と呼ぶ：

(1) C は，$[0,1]$ 上の一様分布 $U(0,1)$ を周辺分布に持つようなある 2 次元確率変数の分布関数である．

(2) 次の 2 つがともに成立する：

- 任意の $u, v \in [0,1]$ に対して
$$C(u,0) = C(0,v) = 0, \quad C(u,1) = u, \quad C(1,v) = v.$$
- $0 \leqq u_1 \leqq u_2 \leqq 1$, $0 \leqq v_1 \leqq v_2 \leqq 1$ ならば
$$C(u_2,v_2) - C(u_1,v_2) - C(u_2,v_1) + C(u_1,v_1) \geqq 0.$$

定義 1.2 2 次元確率変数 (X,Y) の結合分布関数を $F_{X,Y}$ と書き，周辺分布関数をそれぞれ F_X, F_Y と書く．(X,Y) が**連続型** (continuous) であるとは，F_X, F_Y がともに連続であることをいう．

定理 1.3 (Sklar) (X,Y) を 2 次元連続型確率変数とすると，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して
$$F_{X,Y}(x,y) = C\bigl(F_X(x), F_Y(y)\bigr)$$
が成立するようなコピュラ C がただ 1 つ存在する．このコピュラ C を $C_{X,Y}$ と書き，(X,Y) が定めるコピュラと呼ぶ．

例 1.4 2 次元連続型確率変数 (X,Y) に対して，X, Y が独立ならば $C_{X,Y}(u,v) = uv$ である．このコピュラを**積コピュラ** (product copula) と呼ぶ．

2010 Mathematics Subject Classification: 62H20, 62P05
キーワード：コピュラ，正規コピュラ，裾依存性
* 〒819–0395 福岡県福岡市西区元岡 744 九州大学大学院数理学研究院
e-mail: `ssaito@math.kyushu-u.ac.jp`
web: `http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~ssaito/`

定義 1.5 $\rho \in (-1,1)$ に対して，相関係数 ρ の 2 変量正規分布に従う確率変数のコピュラを相関係数 ρ の**正規コピュラ** (normal copula) または **Gauss コピュラ** (Gaussian copula) と呼ぶ．

2. コピュラの裾依存性

定義 2.1 2 次元連続型確率変数 (X,Y) に対して

$$\lambda_{X,Y}(t) = P\bigl(F_Y(Y) > t \bigm| F_X(X) > t\bigr) \quad (0 < t < 1), \qquad \lambda_{X,Y} = \lim_{t \uparrow 1} \lambda(t)$$

とおき，$\lambda_{X,Y}$ を (X,Y) の**裾依存パラメータ** (tail-dependence parameter) と呼ぶ．

命題 2.2 2 次元連続型確率変数 (X,Y) に対して，次が成立する：

$$\lambda_{X,Y}(t) = \frac{1 - 2t + C_{X,Y}(t,t)}{1-t}.$$

特に，$\lambda_{X,Y}(t)$, $\lambda_{X,Y}$ は $C_{X,Y}$ にのみ依存する．

例 2.3 X, Y が独立ならば $C_{X,Y}(u,v) = uv$ なので $\lambda_{X,Y}(t) = 1-t$, $\lambda_{X,Y} = 0$ である．(X,Y) が正規コピュラを定める場合も $\lambda_{X,Y} = 0$ となることが知られている．

注意 2.4 この例から正規コピュラは裾依存性を表せないとみなされることがあるが，次の表のように各 t に対する $\lambda_{X,Y}(t)$ は積コピュラの場合と正規コピュラの場合で様子が相当異なる：

コピュラ	積	正規 ($\rho = 0.25$)	正規 ($\rho = 0.5$)	比
$t = 0.8$	0.2000	0.3070	0.4358	$1 : 1.535 : 2.179$
$t = 0.9$	0.1000	0.1933	0.3240	$1 : 1.933 : 3.240$
$t = 0.95$	0.0500	0.1229	0.2438	$1 : 2.457 : 4.876$
$t = 0.99$	0.0100	0.0438	0.1294	$1 : 4.375 : 12.94$
$t = 0.995$	0.0050	0.0282	0.0993	$1 : 5.641 : 19.85$
$t = 0.999$	0.0010	0.0103	0.0543	$1 : 10.26 : 54.26$

この事実を念頭に，正規コピュラの場合に $\lambda_{X,Y}(t)$ の漸近的な振る舞いを調べたのが次の主定理である．

定理 2.5 (Main theorem) 2 次元連続型確率変数 (X,Y) が相関係数 ρ の正規コピュラを定めるならば，次が成立する：

$$\lambda(t) \sim (2\pi)^{-\frac{\rho}{1+\rho}} \sqrt{\frac{(1+\rho)^3}{1-\rho}}\,(1-t)^{\frac{1-\rho}{1+\rho}} \Phi^{-1}(t)^{-\frac{2\rho}{1+\rho}} \qquad (t \uparrow 1).$$

ただし，$\Phi\colon \mathbb{R} \longrightarrow (0,1)$ は標準正規分布の分布関数

$$\Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{s} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

を表す．