Wang変換による保険料算出原理とHermite多項式

斎藤　新悟　（九州大学）*

当研究成果は，講演者が日新火災海上保険株式会社と九州大学との共同研究に携わる中で近藤宏樹氏（日新火災海上保険株式会社），谷口説男氏（九州大学大学院数理学研究院）と共同で得たものである．

1. Wang変換による保険料算出原理

保険金の分布から保険料を算出する方法として，Wang [1] は現在Wang変換と呼ばれる変換を用いる方法を提案した．

確率変数 X の分布関数を F_X と書く．φ, Φ をそれぞれ標準正規分布 $N(0,1)$ の確率密度関数，分布関数とする：$\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2}\exp(-x^2/2)$, $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)\,dy$ $(x \in \mathbb{R})$.

定義 1.1（Wang変換） 確率変数 X，実数 h に対して，

$$F_{W_{X,h}}(x) = \Phi\Big(\Phi^{-1}\Big(F_X(x)\Big) - h\Big) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

を満たす確率変数 $W_{X,h}$ を X の **Wang変換**と呼び，その期待値 $E[W_{X,h}]$ を $\pi(X,h)$ と書く．

$W_{X,0}$ は X と同分布なので $\pi(X,0) = E[X]$ であり，$\pi(X,h)$ は h に関して単調増加である．Wangが提示した方法は X が保険金を表すとき $\pi(X,h)$ を保険料とするものであり，パラメータ h は正の実数を適切に選ぶ.

例 1.2 X が正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従うとすると，$W_{X,h}$ は $N(\mu + h\sigma, \sigma^2)$ に従うことが分かるので，$\pi(X,h) = \mu + h\sigma$ である．

例 1.3 X が対数正規分布 $LN(\mu,\sigma^2)$ に従う，すなわち X が正値で $\log X$ が $N(\mu,\sigma^2)$ に従うとする（このとき $E[X] = \exp(\mu + \sigma^2/2)$ である）と，$W_{X,h}$ は $LN(\mu + h\sigma, \sigma^2)$ に従うことが分かるので，$\pi(X,h) = \exp(\mu + h\sigma + \sigma^2/2)$ が成立する．

例 1.4 X が $[a,b]$ 上の一様分布に従うとき，$\pi_h(X) = a + (b-a)\Phi\Big(h/\sqrt{2}\Big)$ が成立する．

2. Wang変換とHermite多項式

$\pi(X,h)$ の Maclaurin 展開の係数は Hermite 多項式を用いて表されることが分かる．これが本講演の主定理である．

定義 2.1 非負整数 n に対して，**Hermite 多項式** $H_n(x)$ を次で定義する：

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}.$$

例えば $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = x$, $H_2(x) = x^2 - 1$ である．

確率変数 X に対して $F_X^{-1}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geqq p\}$ $\Big(p \in (0,1)\Big)$ と定義する．

* 〒819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744　九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所
e-mail: `ssaito@imi.kyushu-u.ac.jp`
web: `http://imi.kyushu-u.ac.jp/~ssaito/`

定理 2.2 X を確率変数とする．

(1) Z を $N(0,1)$ に従う確率変数とし，$g = F_X^{-1} \circ \Phi$ とおくと，$g(Z+h)$ は $W_{X,h}$ と同分布である．特に，$g(Z)$ は X と同分布である．

(2) 非負整数 n に対して

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} g(z) H_n(z) \varphi(z) \, dz$$

とおくと，適切な可積分性の条件の下で次が成立する：

$$\pi(X,h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} h^n.$$

証明

(1) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} F_{W_{X,h}}(x) &= \Phi\Big(\Phi^{-1}\big(F_X(x)\big) - h\Big) = P\Big(Z \leqq \Phi^{-1}\big(F_X(x)\big) - h\Big) \\ &= P\Big(\Phi(Z+h) \leqq F_X(x)\Big) = P\Big(F_X^{-1}\big(\Phi(Z+h)\big) \leqq x\Big) \\ &= P\Big(g(Z+h) \leqq x\Big) = F_{g(Z+h)}(x) \end{aligned}$$

となるので，$W_{X,h}$ と $g(Z+h)$ は同分布である．

(2) Hermite 多項式の母関数

$$\exp\left(tx - \frac{t^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

を用いることにより

$$\begin{aligned} \pi(X,h) &= E[W_{X,h}] = E[g(Z+h)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(z+h)\varphi(z)\, dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(z)\varphi(z-h)\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} g(z) \exp\left(hz - \frac{h^2}{2}\right)\varphi(z)\, dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(z)\left(\sum_{n=0}^{\infty} H_n(z)\frac{h^n}{n!}\right)\varphi(z)\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} g(z) H_n(z) \varphi(z)\, dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} h^n \end{aligned}$$

を得る． ∎

注意 2.3 $a_n = E[g(Z)H_n(Z)] = E[XH_n(Z)]$ と書ける．また，$a_0 = E[X]$ であり，$E[Z] = 0$, $\sigma(Z) = 1$ より次が成立する：

$$0 \leqq a_1 = E[XZ] = \mathrm{Cov}(X,Z) \leqq \sigma(X).$$

参考文献

[1] S. S. Wang, A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks, *J. Risk Insurance* **67** (2000), no. 1, 15–36.