Wang 変換による保険料算出原理と Hermite 多項式

斎藤新悟（九大 IMI）

$\left.\begin{array}{l}\text{近藤宏樹氏（日新火災）}\\\text{谷口説男氏（九大数理）}\end{array}\right\}$ との共同研究

保険料算出原理 π：

X：保険金を表す確率変数

$\longmapsto \quad \pi(X) \in \mathbb{R}$：保険料

定義 1.1

$h \geqq 0.$

X の **Wang 変換**とは，分布が次で与えられるような確率変数 $W_{X,h}$：

$$\boxed{F_{W_{X,h}}(x) = \Phi\bigl(\Phi^{-1}\bigl(F_X(x)\bigr) - h\bigr)}\,.$$

ただし

$F_\bullet(x) = P(\bullet \leqq x)$：

確率変数 $\bullet$ の分布関数,

$\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy$：

標準正規分布 $N(0,1)$ の分布関数.

$$\boxed{\pi(X,h) = E[W_{X,h}]}\,.$$

注意

$h = 0$ のとき,

$$W_{X,0} \overset{d}{=} X, \quad \pi(X,0) = E[X].$$

$h > 0$ のとき, $W_{X,h}$ は（h に応じて）X を大きくしたもので,

$$\pi(X,h) \geqq E[X].$$

例 1.2

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき,

$$W_{X,h} \sim N(\mu + h\sigma, \sigma^2),$$
$$\pi(X,h) = \mu + h\sigma.$$

例 1.3

$\log X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$X \sim LN(\mu, \sigma^2)$ のとき,

$$W_{X,h} \sim LN(\mu + h\sigma, \sigma^2),$$
$$\pi(X,h) = \exp\left(\mu + h\sigma + \frac{\sigma^2}{2}\right).$$

例 1.4

$X \sim U(a, b)$ のとき,

$$\pi(X,h) = a + (b-a)\Phi\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right).$$

$h>0$ はどれくらいの値が適切？

$\longrightarrow$ 実データで実験すると,

0 にごく近い値が適切.

$\longrightarrow$ $\pi(X,h)$ を h で Maclaurin 展開した係数が知りたい.

定理 2.2 (2)

$$\pi(X,h)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}h^n.$$

ただし,

$$\boxed{a_n=\int_{-\infty}^{\infty}(F_X^{-1}\circ\Phi)(z)H_n(z)\varphi(z)\,dz},$$

$$F_X^{-1}(p)=\inf\{x\in\mathbb{R}\mid F_X(x)\geqq p\},$$

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy,$$

$$H_n(z) = (-1)^n e^{\frac{z^2}{2}} \frac{d^n}{dz^n} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

(**Hermite 多項式**),

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

注意 2.3

$Z \sim N(0,1)$ のとき $(F_X^{-1} \circ \Phi)(Z)$ は

- X と同分布,
- **共単調** (一方が大 $\Longrightarrow$ 他方も大).

言い換え：

X と共単調な $Z \sim N(0,1)$ を取ると

$$\boxed{a_n = E[XH_n(Z)]}\,.$$

特に $a_0 = E[X]$, $a_1 = E[XZ]$.

<u>a_1 について</u>

- $E[Z] = 0$ より $a_1 = \mathrm{Cov}(X, Z)$.
- 共単調性, $\sigma(Z) = 1$ より

$$\boxed{0 \leqq a_1 \leqq \sigma(X)}\,.$$

- a_1 は X の分布と正規分布との近さを測る指標？