mod p 多重ゼータ値に対する Bowman-Bradley の定理

斎藤　新悟　(九州大学) *1
若林　徳子　(九州産業大学) *2

1. 多重ゼータ値に対する Bowman-Bradley の定理

定義 1.1 正の整数 $k_1, \ldots, k_n$ $(k_1 \geqq 2)$ に対して，**多重ゼータ値** $\zeta(k_1, \ldots, k_n)$，**等号つき多重ゼータ値** $\zeta^\star(k_1, \ldots, k_n)$ を次で定義する：

$$\zeta(k_1, \ldots, k_n) = \sum_{m_1 > \cdots > m_n \geqq 1} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}} \in \mathbb{R},$$
$$\zeta^\star(k_1, \ldots, k_n) = \sum_{m_1 \geqq \cdots \geqq m_n \geqq 1} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}} \in \mathbb{R}.$$

定義 1.2 正の整数の有限列 $(a_1, \ldots, a_m)$, $(b_1, \ldots, b_n)$ に対して，それぞれの順番を保ちつつ重ね合わせて得られる $(m+n)!/m!n!$ 個の有限列の形式的な和を

$$(a_1, \ldots, a_m) ш (b_1, \ldots, b_n)$$

と書く．$\zeta, \zeta^\star$ をこの形式和に対して線形に拡張する．

例 1.3 $m = n = 2$ のとき，次が成立する：

$$\begin{aligned}\zeta\Big((a_1, a_2) ш (b_1, b_2)\Big) &= \zeta(a_1, a_2, b_1, b_2) + \zeta(a_1, b_1, a_2, b_2) + \zeta(a_1, b_1, b_2, a_2) \\ &\quad + \zeta(b_1, a_1, a_2, b_2) + \zeta(b_1, a_1, b_2, a_2) + \zeta(b_1, b_2, a_1, a_2).\end{aligned}$$

定理 1.4 (Bowman-Bradley [1], Kondo-S.-Tanaka [2]) 任意の非負整数 m, n に対して，

$$w = (\underbrace{3, 1, \ldots, 3, 1}_{2m}) ш (\underbrace{2, \ldots, 2}_{n})$$

とおくと，次が成立する：

$$\zeta(w), \zeta^\star(w) \in \mathbb{Q}\pi^{4m+2n}.$$

注意 1.5 この定理の w は

$$w = \sum_{\substack{\sum_{i=0}^{2m} n_i = n \\ n_0, \ldots, n_{2m} \geqq 0}} (\underbrace{2, \ldots, 2}_{n_0}, 3, \underbrace{2, \ldots, 2}_{n_1}, 1, \underbrace{2, \ldots, 2}_{n_2}, \ldots, 3, \underbrace{2, \ldots, 2}_{n_{2m-1}}, 1, \underbrace{2, \ldots, 2}_{n_{2m}})$$

と書ける．また，$m = 0$ または $n = 0$ の場合を考えることにより，この定理から次が従う：

$$\zeta(\underbrace{2, \ldots, 2}_{n}), \zeta^\star(\underbrace{2, \ldots, 2}_{n}) \in \mathbb{Q}\pi^{2n}, \qquad \zeta(\underbrace{3, 1, \ldots, 3, 1}_{2m}), \zeta^\star(\underbrace{3, 1, \ldots, 3, 1}_{2m}) \in \mathbb{Q}\pi^{4m}.$$

*1 〒819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744　九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所
e-mail: ssaito@imi.kyushu-u.ac.jp
web: http://imi.kyushu-u.ac.jp/~ssaito/
*2 〒813-8503 福岡県福岡市東区松香台 2 丁目 3-1　九州産業大学 工学部 基礎教育サポートセンター
e-mail: noriko@ip.kyusan-u.ac.jp
web: http://www.kyusan-u.ac.jp/J/noriko/

2. mod p 多重ゼータ値に対するBowman-Bradleyの定理

定義2.1 (Zagier) $\mathbb{Q}$代数$\mathcal{A}$を

$$\mathcal{A} = \prod_p (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \Big/ \bigoplus_p (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

で定義する．ただし，pはすべての素数を動く添字である．

正の整数$k_1, \ldots, k_n$に対して，**mod p 多重ゼータ値** $\zeta_{\mathcal{A}}(k_1, \ldots, k_n)$，**mod p 等号つき多重ゼータ値** $\zeta^\star_{\mathcal{A}}(k_1, \ldots, k_n)$を次で定義する：

$$\zeta_{\mathcal{A}}(k_1, \ldots, k_n) = \left(\sum_{p > m_1 > \cdots > m_n \geqq 1} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}} \right)_p \in \mathcal{A},$$

$$\zeta^\star_{\mathcal{A}}(k_1, \ldots, k_n) = \left(\sum_{p > m_1 \geqq \cdots \geqq m_n \geqq 1} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}} \right)_p \in \mathcal{A}.$$

例2.2 任意の正の整数kに対して，$p-1 \nmid k$なるすべての素数pに対して

$$\sum_{m=1}^{p-1} \frac{1}{m^k} \equiv 0 \pmod{p}$$

となるので，$\zeta_{\mathcal{A}}(k) = \zeta^\star_{\mathcal{A}}(k) = 0$である．

定理2.3 (S.-Wakabayashi) m, nを$(m,n) \neq (0,0)$なる任意の非負整数とする．正の奇数$a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m$，正の偶数$c_1, \ldots, c_n$に対して，

$$w = \sum_{\substack{\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_m \\ \rho \in \mathfrak{S}_n}} (a_{\sigma(1)}, b_{\tau(1)}, \ldots, a_{\sigma(m)}, b_{\tau(m)}) ш (c_{\rho(1)}, \ldots, c_{\rho(n)})$$

とおくと，次が成立する：

$$\zeta_{\mathcal{A}}(w), \zeta^\star_{\mathcal{A}}(w) = 0.$$

注意2.4 $a_1 = \cdots = a_m = 3$, $b_1 = \cdots = b_m = 1$, $c_1 = \cdots = c_n = 2$の場合は

$$w = m!^2 n! (\underbrace{3, 1, \ldots, 3, 1}_{2m}) ш (\underbrace{2, \ldots, 2}_{n})$$

となり，定理1.4の類似が従う．さらに$n=0$の場合から金子昌信氏[3]の予想

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\underbrace{3, 1, \ldots, 3, 1}_{2m}) = \zeta^\star_{\mathcal{A}}(\underbrace{3, 1, \ldots, 3, 1}_{2m}) = 0$$

が従う．

参考文献

[1] D. Bowman and D. M. Bradley, *The algebra and combinatorics of shuffles and multiple zeta values*, J. Combin. Theory Ser. A **97** (2002), 43–61.

[2] H. Kondo, S. Saito, and T. Tanaka, *The Bowman-Bradley theorem for multiple zeta-star values*, J. Number Theory **132** (2012), 1984–2002.

[3] 金子昌信，有限多重ゼータ値 mod p と多重ゼータ値の関係式，京都大学数理解析研究所講究録 **1813** (2012), 27–31.