mod p 多重ゼータ値に対する Bowman-Bradley の定理

斎藤新悟（九大 IMI）
若林徳子（九州産大工）

1. 多重ゼータ値に対する BB の定理

定義 1.1（多重ゼータ値）

正整数 $k_1, \ldots, k_n$ $(k_1 \geqq 2)$ に対して，

$$\zeta(k_1, \ldots, k_n) := \sum_{m_1 > \cdots > m_n \geqq 1} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}} \in \mathbb{R},$$

$$\zeta^{\star}(k_1, \ldots, k_n) := \sum_{m_1 \geqq \cdots \geqq m_n \geqq 1} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}} \in \mathbb{R}.$$

定理 1.4 (1) (Bowman-Bradley)

- $\zeta(\underbrace{3,1,\ldots,3,1}_{2m}) \in \mathbb{Q}\pi^{4m}$,
- $\zeta(\underbrace{2,\ldots,2}_{n}) \in \mathbb{Q}\pi^{2n}$

の共通の一般化.

定理 1.4 (2) (Kondo-S.-Tanaka)

BB の定理で ζ を $\zeta^\star$ にしても成立.

2. mod p 多重ゼータ値に対する BB の定理

定義 2.1 (Zagier)

$$\mathcal{A} := \prod_{p:\text{素数}} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \Big/ \bigoplus_{p:\text{素数}} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

これは $\mathbb{Q}$ 代数.

正整数 $k_1, \ldots, k_n$ に対して,

$$\zeta_{\mathcal{A}}(k_1, \ldots, k_n) := \left(\sum_{p > m_1 > \cdots > m_n \geqq 1} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}} \right)_p \in \mathcal{A}.$$

定理 2.3 (S.-Wakabayashi)

- $\zeta_{\mathcal{A}}(3, 1, \ldots, 3, 1) = 0$ (金子昌信氏の予想),
- $\zeta_{\mathcal{A}}(2, \ldots, 2) = 0$ (容易)

の共通の一般化が，BB の定理よりはるかに強い形で成立.

$\zeta_{\mathcal{A}}$ を $\zeta_{\mathcal{A}}^{\star}$ にしても成立.