多重ゼータ値に対する正規化定理の多項式拡張

広瀬　稔　(九州大学) *1
村原　英樹　(中村学園大学) *2
斎藤　新悟　(九州大学) *3

1. 多重ゼータ値に対する正規化定理

定義 1.1 正の整数 $k_1,\dots,k_r$ $(k_1 \geqq 2)$ に対して，**多重ゼータ値** $\zeta(k_1,\dots,k_r) \in \mathbb{R}$ を次で定義する：

$$\zeta(k_1,\dots,k_r) = \sum_{m_1>\cdots>m_r\geqq 1} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}.$$

井原・金子・Zagier [1] は，$k_1 = 1$ の場合も含めたすべての正の整数 $k_1,\dots,k_r$ に対して定義される，多重ゼータ値の 2 通りの**正規化** $\zeta^*(k_1,\dots,k_r;T), \zeta^{ш}(k_1,\dots,k_r;T) \in \mathbb{R}[T]$ を考案した．これらはともに

- $k_1 \geqq 2$ ならば $\zeta^\bullet(k_1,\dots,k_r;T) = \zeta(k_1,\dots,k_r) \in \mathbb{R}$ $(\bullet \in \{*, ш\})$,
- $\zeta^\bullet(1;T) = T$ $(\bullet \in \{*, ш\})$

を満たし，$\zeta^*(k_1,\dots,k_r;T)$ は例えば

$$\begin{aligned}\zeta^*(1,1;T) &= \sum_{m_1>m_2\geqq 1}\frac{1}{m_1m_2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\\ &= \frac{1}{2}\zeta^*(1;T)^2 - \frac{1}{2}\zeta^*(2;T) = \frac{1}{2}T^2 - \frac{1}{2}\zeta(2)\end{aligned}$$

のような形式的な計算を念頭において定義されるものであり，$\zeta^{ш}(k_1,\dots,k_r;T)$ は多重ゼータ値の反復積分表示を念頭において定義されるものである．

$A(u) \in \mathbb{R}[[u]]$ を

$$A(u) = \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\zeta(n)u^n\right)$$

で定義し，$\mathbb{R}$ 線形写像 $\rho\colon \mathbb{R}[T] \to \mathbb{R}[T]$ を $\mathbb{R}[T][[u]]$ における等式

$$\rho(e^{Tu}) = A(u)e^{Tu}$$

で定義する．

本研究は JSPS 科研費 JP18J00982, JP18K03243, JP18K13392 の助成を受けたものである．
2010 Mathematics Subject Classification: Primary 11M32; Secondary 05A19
キーワード：多重ゼータ値，正規化，対称多重ゼータ値
*1 〒 819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744　九州大学 大学院数理学研究院
e-mail: m-hirose@math.kyushu-u.ac.jp
web: https://researchmap.jp/mathhirose/
*2 〒 814-0198 福岡県福岡市城南区別府 5-7-1　中村学園大学 教育学部 児童幼児教育学科
e-mail: hmurahara@nakamura-u.ac.jp
web: https://researchmap.jp/murahara/
*3 〒 819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744　九州大学 基幹教育院
e-mail: ssaito@artsci.kyushu-u.ac.jp
web: http://www.artsci.kyushu-u.ac.jp/~ssaito/

定理 1.2（井原・金子・Zagier [1]，正規化定理） 任意の正の整数 $k_1, \ldots, k_r$ に対して，次が成立する：

$$\zeta^{ш}(k_1, \ldots, k_r; T) = \rho(\zeta^*(k_1, \ldots, k_r; T)).$$

例 1.3 $\rho(1) = 1$, $\rho(T) = T$, $\rho(T^2) = T^2 + \zeta(2)$ であり，

$$\zeta^*(1, 1; T) = \frac{1}{2}T^2 - \frac{\zeta(2)}{2}, \quad \zeta^{ш}(1, 1; T) = \frac{1}{2}T^2$$

なので確かに $\zeta^{ш}(1, 1; T) = \rho(\zeta^*(1, 1; T))$ が成立する．

2. 正規化定理の多項式拡張

定義 2.1 正の整数 $k_1, \ldots, k_r$ および $\bullet \in \{*, ш\}$ に対して，$\zeta_x^\bullet(k_1, \ldots, k_r; T) \in \mathbb{R}[x, T]$ を次で定義する：

$$\zeta_x^\bullet(k_1, \ldots, k_r; T) = \sum_{i=0}^{r} x^{k_1+\cdots+k_i}\zeta^\bullet(k_i, \ldots, k_1; T)\zeta^\bullet(k_{i+1}, \ldots, k_r; T).$$

注意 2.2 金子・Zagier [2] は $\zeta_x^*(k_1, \ldots, k_r; T)$, $\zeta_x^{ш}(k_1, \ldots, k_r; T)$ に $x = -1$ を代入したものを考察し，これらはどちらも $\mathbb{R}$ の元となり，$\mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$（$\mathcal{Z}$ は多重ゼータ値が張る $\mathbb{Q}$ 線形空間）の元としては一致することを証明した．この $\mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$ の元を**対称多重ゼータ値**と呼ぶ.

$A_x(u) \in \mathbb{R}(x)[[u]]$ を

$$A_x(u) = \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\zeta(n)\frac{x^n+1}{(x+1)^n}u^n\right)$$

で定義し，$\mathbb{R}(x)$ 線形写像 $\rho_x\colon \mathbb{R}(x)[T] \to \mathbb{R}(x)[T]$ を $\mathbb{R}(x)[T][[u]]$ における等式

$$\rho_x(e^{Tu}) = A_x(u)e^{Tu}$$

で定義する．

定理 2.3（主定理） 任意の正の整数 $k_1, \ldots, k_r$ に対して，次が成立する：

$$\zeta_x^{ш}(k_1, \ldots, k_r; T) = \rho_x(\zeta_x^*(k_1, \ldots, k_r; T)).$$

例 2.4 $\rho_x(1) = 1$, $\rho_x(T) = T$, $\rho_x(T^2) = T^2 + \zeta(2)(x^2+1)/(x+1)^2$ であり，

$$\zeta_x^*(1, 1; T) = \frac{(x+1)^2}{2}T^2 - \frac{\zeta(2)}{2}(x^2+1), \quad \zeta_x^{ш}(1, 1; T) = \frac{(x+1)^2}{2}T^2$$

なので確かに $\zeta_x^{ш}(1, 1; T) = \rho_x(\zeta_x^*(1, 1; T))$ が成立する．

参考文献

[1] K. Ihara, M. Kaneko, and D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compos. Math. **142** (2006), 307–338.

[2] M. Kaneko and D. Zagier, *Finite multiple zeta values*, in preparation.