多重ゼータ値に対する
正規化定理の多項式拡張

広瀬稔　（九州大学）
村原英樹（中村学園大学）
斎藤新悟（九州大学）

2018/09/26

多重ゼータ値とその正規化

arXiv:1808.06745 に論文あり．アブストラクトよりわずかに一般化．

定義 1.1（**多重ゼータ値**）
正の整数 $k_1, \dots, k_r$ $(k_1 \geqq 2)$ に対して，

$$\zeta(k_1, \dots, k_r) := \sum_{m_1 > \cdots > m_r \geqq 1} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}} \in \mathbb{R}.$$

正規化（井原・金子・Zagier）：
すべての正の整数 $k_1, \dots, k_r$ に対して，次を満たすような
$\zeta^*(k_1, \dots, k_r; T), \zeta^{ш}(k_1, \dots, k_r; T) \in \mathbb{R}[T]$ を定義：

- $k_1 \geqq 2$ ならば $\zeta^\bullet(k_1, \dots, k_r; T) = \zeta(k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{R}$ $(\bullet \in \{*, ш\})$,
- $\zeta^\bullet(1; T) = T$ $(\bullet \in \{*, ш\})$,
- $\zeta^*(k_1, \dots, k_r; T)$ は $*$ 積（調和積，スタッフル積）を満たし，
  $\zeta^{ш}(k_1, \dots, k_r; T)$ は ш 積（シャッフル積）を満たす．

多重ゼータ値に対する正規化定理

$$A(u) := \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\zeta(n)u^n\right) \in \mathbb{R}[[u]].$$

$\rho\colon \mathbb{R}[T] \to \mathbb{R}[T]$ は次を満たす $\mathbb{R}$ 線形写像：

$$\rho(e^{Tu}) = A(u)e^{Tu} \qquad \text{in } \mathbb{R}[T][[u]].$$

定理 1.2（**正規化定理**，井原・金子・Zagier）
任意の正の整数 $k_1, \ldots, k_r$ に対して，

$$\zeta^{ш}(k_1, \ldots, k_r; T) = \rho(\zeta^*(k_1, \ldots, k_r; T)).$$

正規化の多項式拡張

定義 2.1
正の整数 $k_1,\dots,k_r$ および $\bullet\in\{*,ш\}$ に対して,

$$\begin{aligned}&\zeta^{\bullet}_{x,y}(k_1,\dots,k_r;T)\\&:=\sum_{i=0}^{r}x^{k_1+\cdots+k_i}y^{k_{i+1}+\cdots+k_r}\zeta^{\bullet}(k_i,\dots,k_1;T)\zeta^{\bullet}(k_{i+1},\dots,k_r;T)\\&\in\mathbb{R}[x,y,T].\end{aligned}$$

$y=1$: アブストラクト.
$x=0$, $y=1$: 前述の $\zeta^{\bullet}(k_1,\dots,k_r;T)$ と一致.
$x=-1$, $y=1$: mod $\zeta(2)$ すると**対称多重ゼータ値**（金子・Zagier）.

正規化定理の多項式拡張

$$A_{x,y}(u) := \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \zeta(n) \frac{\boldsymbol{x^n + y^n}}{\boldsymbol{(x+y)^n}} u^n\right) \in \mathbb{R}(x,y)[[u]].$$

$\rho_{x,y} \colon \mathbb{R}(x,y)[T] \to \mathbb{R}(x,y)[T]$ は次を満たす $\mathbb{R}(x,y)$ 線形写像：

$$\rho_{x,y}(e^{Tu}) = A_{x,y}(u) e^{Tu} \qquad \text{in } \mathbb{R}(x,y)[T][[u]].$$

定理 2.3（主定理）

任意の正の整数 $k_1, \ldots, k_r$ に対して，

$$\zeta^{\text{Ш}}_{x,y}(k_1, \ldots, k_r; T) = \rho_{x,y}(\zeta^{*}_{x,y}(k_1, \ldots, k_r; T)).$$