正規コピュラの漸近的裾依存性

斎藤新悟

九州大学大学院数理学研究院

2011/02/11

近藤宏樹氏（日新火災海上保険株式会社）
谷口説男氏（九州大学大学院数理学研究院）
との共同研究

コピュラとは

コピュラは確率変数間の依存関係を記述する.

定義

コピュラとは, $C\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ であって,

$$\exists U, V \sim \mathrm{Uniform}(0,1)\ (\text{独立とは限らない})$$
$$C(u,v) = P(U \leqq u,\ V \leqq v) \quad \forall u, v \in [0,1].$$

同値な定義

コピュラとは, $C\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ であって,

- $\forall u, v \in [0,1] \quad C(u,0) = C(0,v) = 0,\ C(u,1) = u,\ C(1,v) = v.$
- $0 \leqq u_1 \leqq u_2 \leqq 1,\ 0 \leqq v_1 \leqq v_2 \leqq 1$
  $$\Longrightarrow C(u_2,v_2) - C(u_1,v_2) - C(u_2,v_1) + C(u_1,v_1) \geqq 0.$$

Sklar の定理

Sklar の定理 (1) ← 同時分布は周辺分布とコピュラで書ける

(X, Y)：連続型（周辺分布関数 F_X, F_Y が連続）2 次元確率変数.
$F_{X,Y}(x, y) := P(X \leqq x,\ Y \leqq y)$：同時分布関数.
このとき，$\exists! C_{X,Y}$：コピュラ

$$F_{X,Y}(x, y) = C_{X,Y}\big(F_X(x), F_Y(y)\big) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Sklar の定理 (2) ← 周辺分布とコピュラは「独立に」選べる

F_1, F_2：連続な 1 次元分布関数，C：コピュラ.
このとき，$\exists (X, Y)$：2 次元確率変数

- 周辺分布関数は F_1, F_2.
- $C_{X,Y} = C$.

コピュラの例

$$F_{X,Y}(x,y) = C_{X,Y}\big(F_X(x), F_Y(y)\big).$$

- 積コピュラ $C(u,v) = uv$.
  $\longleftarrow$ 独立な X, Y に対応.
- Fréchet-Hoeffding 上界 $C(u,v) = \min\{u,v\}$.
  $\longleftarrow$ $Y = \varphi(X)$（φ は単調増加）に対応.
- Fréchet-Hoeffding 下界 $C(u,v) = \max\{u+v-1, 0\}$.
  $\longleftarrow$ $Y = \varphi(X)$（φ は単調減少）に対応.
- 正規コピュラ $C_\rho = C_{X,Y}$ $(-1 < \rho < 1)$.
  ただし $(X,Y) \sim N\left((0,0), \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$.

裾依存性とコピュラ

(X, Y)：連続型 2 次元確率変数.
このとき，$F_X(X), F_Y(Y) \sim \mathrm{Uniform}(0,1)$.

定義

- (X, Y) の裾依存度：

$$\lambda_{X,Y}(t) := P\big(F_Y(Y) > t \,\big|\, F_X(X) > t\big) \quad (0 < t < 1).$$

- (X, Y) の裾依存係数：

$$\lambda_{X,Y} := \lim_{t \nearrow 1} \lambda_{X,Y}(t).$$

命題

$$\lambda_{X,Y}(t) = \frac{1 - 2t + C_{X,Y}(t,t)}{1-t}.$$

特に，$\lambda_{X,Y}(t)$, $\lambda_{X,Y}$ は $C_{X,Y}$ のみによって決まる.

裾依存度の例

$$\lambda_{X,Y}(t) = P\big(F_Y(Y) > t \bigm| F_X(X) > t\big) \to \lambda_{X,Y} \ (t \nearrow 1).$$

- 積コピュラ $C(u,v) = uv$
  $\Longrightarrow \lambda(t) = 1 - t,\ \lambda = 0.$
- Fréchet-Hoeffding 上界 $C(u,v) = \min\{u,v\}$
  $\Longrightarrow \lambda(t) = 1,\ \lambda = 1.$
- Fréchet-Hoeffding 下界 $C(u,v) = \max\{u+v-1, 0\}$
  $\Longrightarrow \lambda(t) = 0 \left(t \geqq \frac{1}{2}\right),\ \lambda = 0.$
- 正規コピュラ $C_\rho \ (-1 < \rho < 1)$
  $\Longrightarrow \lambda = 0.$

Fréchet-Hoeffding 下界，正規コピュラの裾依存性は積コピュラ（独立性）と同じ？

裾依存度の比較

	積コピュラ	FH 下界	正規コピュラ ($\rho = 0.5$)
$t = 0.8$	0.2000	0.0000	0.4358
$t = 0.9$	0.1000	0.0000	0.3240
$t = 0.95$	0.0500	0.0000	0.2438
$t = 0.99$	0.0100	0.0000	0.1294
$t = 0.995$	0.0050	0.0000	0.0993
$t = 0.999$	0.0010	0.0000	0.0543

$\longrightarrow$ 極限値はすべて 0 でも漸近挙動は異なる.

漸近挙動

- 積コピュラ：$\lambda(t) = 1 - t.$
- FH 下界：$\lambda(t) = 0.$
- 正規コピュラ：

主定理

正規コピュラ C_ρ について

$$\lambda(t) = \sqrt{\frac{(1+\rho)^3}{2\pi(1-\rho)}}\, e^{-\frac{1-\rho}{2(1+\rho)}s^2} \left(s^{-1} - \frac{1+2\rho-\rho^2}{1-\rho} s^{-3} + O(s^{-5}) \right)$$

$$\sim (4\pi)^{-\frac{\rho}{1+\rho}} \sqrt{\frac{(1+\rho)^3}{1-\rho}} (1-t)^{\frac{1-\rho}{1+\rho}} \left(-\log(1-t)\right)^{-\frac{\rho}{1+\rho}}.$$

ただし $t = \Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{s} e^{-x^2/2}\, dx$（標準正規分布の分布関数）.