正規コピュラの漸近的裾依存性

斎藤新悟（九州大学大学院数理学研究院）

当研究成果は，講演者が日新火災海上保険株式会社と九州大学大学院数理学研究院との共同研究に携わる中で近藤宏樹氏（日新火災海上保険株式会社），谷口説男氏（九州大学大学院数理学研究院）と共同で得たものである．

(X, Y) を 2 次元確率変数とし，周辺分布関数 $F_X(x) = P(X \leqq x)$, $F_Y(y) = P(Y \leqq y)$ はともに連続であると仮定する．このとき，同時分布関数 $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leqq x,\ Y \leqq y)$ は周辺分布関数 F_X, F_Y と**コピュラ**と呼ばれる関数 $C\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ を用いて

$$F_{X,Y}(x,y) = C\bigl(F_X(x), F_Y(y)\bigr)$$

と一意的に表されることが知られている (Sklar の定理)．このコピュラ C は (X, Y) が**定める**コピュラと呼ばれ，X, Y の依存関係を抽出したものである．例えば X, Y が独立であることは (X, Y) が定めるコピュラが積コピュラ $\Pi(u, v) = uv$ であることと同値である．

この講演では，確率変数間の裾の依存関係について考察する．(X, Y) の**裾依存度**を

$$\lambda_{X,Y}(t) = P\bigl(F_Y(Y) > t \bigm| F_X(X) > t\bigr) \qquad (0 < t < 1)$$

で定義し，その極限 $\lambda_{X,Y} = \lim_{t \nearrow 1} \lambda(t)$ を**裾依存係数**と呼ぶ．$\lambda_{X,Y}(t)$, $\lambda_{X,Y}$ は (X, Y) が定めるコピュラ C にしか依存しないことが知られているため，これらを $\lambda_C(t)$, λ_C とも書く．

成分間の相関係数が ρ であるような 2 変量正規分布に従う 2 次元確率変数 (X, Y) が定めるコピュラを相関 ρ の**正規コピュラ**あるいは**ガウス型コピュラ**と呼び，C_ρ と書く．

$\lambda_{C_\rho} = \lambda_\Pi = 0$ であることはよく知られており，このことから正規コピュラは裾での依存関係がないとみなされることがある．しかし，1 に近い t で $\lambda_{C_\rho}(t)$, $\lambda_\Pi(t)$ の値を具体的に計算してみると，これらが 0 に近づく速さには違いがあることが予想される．我々は $\lambda_{C_\rho}(t)$ が 0 に近づく速さを計算し，次の結果を得た：

$$\begin{aligned}
\lambda_{C_\rho}(t) &= \sqrt{\frac{(1+\rho)^3}{2\pi(1-\rho)}} \exp\left(-\frac{1-\rho}{2(1+\rho)} s^2\right) \left(s^{-1} - \frac{1+2\rho-\rho^2}{1-\rho} s^{-3} + O(s^{-5})\right) \\
&\sim (4\pi)^{-\frac{\rho}{1+\rho}} \sqrt{\frac{(1+\rho)^3}{1-\rho}} (1-t)^{\frac{1-\rho}{1+\rho}} \bigl(-\log(1-t)\bigr)^{-\frac{\rho}{1+\rho}} \quad (t \nearrow 1).
\end{aligned}$$

ただし s は $\Phi(s) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{s} \exp(-x^2/2)\, dx = t$ で定められ（Φ は標準正規分布の分布関数），$t \nearrow 1$ のとき $s \nearrow \infty$ である．この定理より $\lambda_{C_\rho}(t)$ はおよそ $(1-t)^{(1-\rho)/(1+\rho)}$ のオーダーで 0 に収束することが分かり，$\rho = 0$ のときを除き $\lambda_\Pi(t) = 1 - t$ とは収束のオーダーが異なる．なお，ここでは簡単のため s^{-3} の項までの係数を記述したが，より高次の項の係数を求めることも可能である．