正規コピュラの漸近的裾依存性

斎藤新悟

九州大学大学院数理学研究院

2010/12/03

近藤宏樹氏（日新火災海上保険株式会社）
谷口説男氏（九州大学大学院数理学研究院）
との共同研究

コピュラとは

コピュラは確率変数間の依存関係を記述する．

定義

コピュラとは，$C\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ であって，

$$\exists U, V \sim \mathrm{Uniform}(0,1) \text{（独立とは限らない）}$$

$$C(u,v) = P(U \leqq u,\ V \leqq v) \quad \forall u, v \in [0,1].$$

同値な定義

コピュラとは，$C\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ であって，

- $\forall u, v \in [0,1] \quad C(u,0) = C(0,v) = 0,\ C(u,1) = u,\ C(1,v) = v.$
- $0 \leqq u_1 \leqq u_2 \leqq 1,\ 0 \leqq v_1 \leqq v_2 \leqq 1$
  $$\Longrightarrow C(u_2,v_2) - C(u_1,v_2) - C(u_2,v_1) + C(u_1,v_1) \geqq 0.$$

Sklar の定理 (1) ← 同時分布は周辺分布とコピュラで書ける

(X,Y)：連続型（周辺分布関数 F_X, F_Y が連続）2 次元確率変数.
$F_{X,Y}(x,y) := P(X \leqq x,\ Y \leqq y)$：同時分布関数.
このとき，$\exists! C_{X,Y}$：コピュラ

$$F_{X,Y}(x,y) = C_{X,Y}\big(F_X(x), F_Y(y)\big) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Sklar の定理 (2) ← 周辺分布とコピュラは「独立に」選べる

F_1, F_2：連続な 1 次元分布関数，C：コピュラ.
このとき，$\exists (X,Y)$：2 次元確率変数

- 周辺分布関数は F_1, F_2.
- $C_{X,Y} = C$.

コピュラの例

$$F_{X,Y}(x,y) = C_{X,Y}\big(F_X(x), F_Y(y)\big).$$

- 積コピュラ $C(u,v) = uv$.
  $\longleftarrow$ 独立な X, Y に対応.
- Fréchet-Hoeffding 上界 $C(u,v) = \min\{u,v\}$.
  $\longleftarrow$ $Y = \varphi(X)$（φ は単調増加）に対応.
- Fréchet-Hoeffding 下界 $C(u,v) = \max\{u+v-1, 0\}$.
  $\longleftarrow$ $Y = \varphi(X)$（φ は単調減少）に対応.
- 正規コピュラ $C_\rho = C_{X,Y}$ $(-1 < \rho < 1)$.
  ただし $(X,Y) \sim N\left((0,0), \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$.

裾依存性とコピュラ

(X, Y)：連続型 2 次元確率変数．
このとき，$F_X(X), F_Y(Y) \sim \mathrm{Uniform}(0,1)$.

定義

- (X, Y) の裾依存度：
$$\lambda_{X,Y}(t) := P\big(F_Y(Y) > t \,\big|\, F_X(X) > t\big) \quad (0 < t < 1).$$
- (X, Y) の裾依存係数：
$$\lambda_{X,Y} := \lim_{t \nearrow 1} \lambda_{X,Y}(t).$$

命題

$$\lambda_{X,Y}(t) = \frac{1 - 2t + C_{X,Y}(t,t)}{1-t}.$$

特に，$\lambda_{X,Y}(t)$, $\lambda_{X,Y}$ は $C_{X,Y}$ のみによって決まる．

裾依存度の例

$$\lambda_{X,Y}(t) = P\big(F_Y(Y) > t \,\big|\, F_X(X) > t\big) \to \lambda_{X,Y} \quad (t \nearrow 1).$$

- 積コピュラ $C(u,v) = uv$
  $\Longrightarrow \lambda(t) = 1 - t,\ \lambda = 0.$
- Fréchet-Hoeffding 上界 $C(u,v) = \min\{u,v\}$
  $\Longrightarrow \lambda(t) = 1,\ \lambda = 1.$
- Fréchet-Hoeffding 下界 $C(u,v) = \max\{u+v-1, 0\}$
  $\Longrightarrow \lambda(t) = 0 \left(t \geqq \frac{1}{2}\right),\ \lambda = 0.$
- 正規コピュラ C_ρ $(-1 < \rho < 1)$
  $\Longrightarrow \lambda = 0.$

Fréchet-Hoeffding 下界，正規コピュラの裾依存性は積コピュラ（独立性）と同じ？

裾依存度の比較

	積コピュラ	FH 下界	正規コピュラ ($\rho = 0.5$)
$t = 0.8$	0.2000	0.0000	0.4358
$t = 0.9$	0.1000	0.0000	0.3240
$t = 0.95$	0.0500	0.0000	0.2438
$t = 0.99$	0.0100	0.0000	0.1294
$t = 0.995$	0.0050	0.0000	0.0993
$t = 0.999$	0.0010	0.0000	0.0543

$\longrightarrow$ 極限値はすべて 0 でも漸近挙動は異なる.

漸近挙動

- 積コピュラ：$\lambda(t) = 1 - t.$
- FH 下界：$\lambda(t) = 0.$
- 正規コピュラ：

主定理

正規コピュラ C_ρ について

$$\lambda(t) = \sqrt{\frac{(1+\rho)^3}{2\pi(1-\rho)}}\, e^{-\frac{1-\rho}{2(1+\rho)}s^2} \left(s^{-1} - \frac{1+2\rho-\rho^2}{1-\rho} s^{-3} + O(s^{-5}) \right)$$

$$\sim (4\pi)^{-\frac{\rho}{1+\rho}} \sqrt{\frac{(1+\rho)^3}{1-\rho}} (1-t)^{\frac{1-\rho}{1+\rho}} \left(-\log(1-t)\right)^{-\frac{\rho}{1+\rho}}.$$

ただし $t = \Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{s} e^{-x^2/2}\, dx$（標準正規分布の分布関数）.

主定理の証明の概略

主定理

$$\lambda(t) = \sqrt{\frac{(1+\rho)^3}{2\pi(1-\rho)}}\, e^{-\frac{1-\rho}{2(1+\rho)}s^2} \left(s^{-1} - \frac{1+2\rho-\rho^2}{1-\rho} s^{-3} + O(s^{-5}) \right).$$

$(X, Y) \sim N\left((0,0), \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \right)$ とする.

$0 < t < 1$ とし，$s := \Phi^{-1}(t)$ とおくと，$t \nearrow 1$ のとき $s \nearrow \infty$ で,

$$\lambda(t) = P\big(\Phi(Y) > t \,\big|\, \Phi(X) > t\big) = \frac{P(X > s,\ Y > s)}{P(X > s)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_s^\infty \int_s^\infty \exp\left(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)} \right) dx\, dy}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_s^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2} \right) dx} =: \frac{A}{B}.$$

分母 B の評価

$$B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_s^\infty e^{-x^2/2}\,dx.$$

$\boxed{\text{部分積分}}$

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\,B &= -\int_s^\infty x^{-1}(e^{-x^2/2})'\,dx \\
&= -\left[x^{-1}e^{-x^2/2}\right]_s^\infty + \int_s^\infty (-x^{-2})e^{-x^2/2}\,dx \\
&= s^{-1}e^{-s^2/2} + \int_s^\infty x^{-3}(e^{-x^2/2})'\,dx \\
&= s^{-1}e^{-s^2/2} + \left[x^{-3}e^{-x^2/2}\right]_s^\infty - \int_s^\infty (-3x^{-4})e^{-x^2/2}\,dx \\
&= (s^{-1} - s^{-3})e^{-s^2/2} - \int_s^\infty 3x^{-5}(e^{-x^2/2})'\,dx \\
&= \cdots .
\end{aligned}$$

分子 A の評価：STEP 1 回転

$$A = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_s^\infty \int_s^\infty \exp\left(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right) dx\, dy.$$

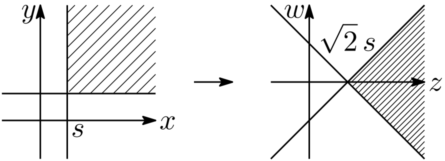
STEP 1：回転

$$\begin{aligned}
x^2 - 2\rho xy + y^2 &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\rho & 0 \\ 0 & 1+\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\rho & 0 \\ 0 & 1+\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

ただし $z = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$, $w = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}}$.

変数変換 $z = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}},\ w = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}}$ により，

$$
\begin{aligned}
2\pi\sqrt{1-\rho^2}\,A &= \int_s^\infty\int_s^\infty \exp\left(-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}\right)dx\,dy \\
&= \iint_{z+w\geqq\sqrt{2}\,s,\ z-w\geqq\sqrt{2}\,s} \exp\left(-\frac{(1-\rho)z^2+(1+\rho)w^2}{2(1-\rho^2)}\right)dz\,dw \\
&= 2\iint_{z-w\geqq\sqrt{2}\,s,\ w\geqq 0} \exp\left(-\frac{z^2}{2(1+\rho)}\right)\exp\left(-\frac{w^2}{2(1-\rho)}\right)dz\,dw \\
&= 2\int_0^\infty\left(\int_{w+\sqrt{2}\,s}^\infty \exp\left(-\frac{z^2}{2(1+\rho)}\right)dz\right)\exp\left(-\frac{w^2}{2(1-\rho)}\right)dw.
\end{aligned}
$$



分子 A の評価：STEP 2 内側の積分を部分積分で評価

$\boxed{\text{STEP 2：内側の積分を部分積分で評価}}$（分母 B の評価と同様）

$$\int_{w+\sqrt{2}\,s}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2(1+\rho)}\right) dz$$
$$= \left(\frac{1+\rho}{w+\sqrt{2}\,s} - \frac{(1+\rho)^2}{(w+\sqrt{2}\,s)^3} + \cdots\right) \exp\left(-\frac{(w+\sqrt{2}\,s)^2}{2(1+\rho)}\right).$$

$$\therefore \pi\sqrt{1-\rho^2}\,A = \int_0^{\infty}\left(\frac{1+\rho}{w+\sqrt{2}\,s} - \frac{(1+\rho)^2}{(w+\sqrt{2}\,s)^3} + \cdots\right)$$
$$\times \exp\left(-\frac{(w+\sqrt{2}\,s)^2}{2(1+\rho)}\right) \exp\left(-\frac{w^2}{2(1-\rho)}\right) dw$$
$$= e^{-\frac{s^2}{2}} \int_0^{\infty}\left(\frac{1+\rho}{w+\sqrt{2}\,s} - \frac{(1+\rho)^2}{(w+\sqrt{2}\,s)^3} + \cdots\right) \exp\left(-\frac{\left(w+\frac{1-\rho}{\sqrt{2}}s\right)^2}{1-\rho^2}\right) dw.$$

STEP 3：外側の積分を部分積分で評価

$$\int_0^\infty \left(\frac{1+\rho}{w+\sqrt{2}\,s} - \frac{(1+\rho)^2}{(w+\sqrt{2}\,s)^3} + \cdots \right) \exp\left(- \frac{\left(w + \frac{1-\rho}{\sqrt{2}} s\right)^2}{1-\rho^2} \right) dw$$

の各項を $\displaystyle\int_{as}^\infty (w+bs)^{-n} e^{-w^2/2}\,dw$ $(a, b > 0,\ n \in \mathbb{N})$ の形に変数変換.

$I_{m,n} := \displaystyle\int_{as}^\infty w^{-m}(w+bs)^{-n} e^{-w^2/2}\,dw$ とおくと,

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= -\int_{as}^\infty w^{-m-1}(w+bs)^{-n}(e^{-w^2/2})'\,dw \\ &= -\left[w^{-m-1}(w+bs)^{-n}e^{-w^2/2}\right]_{as}^\infty + \int_{as}^\infty \Big((-m-1)w^{-m-2}(w+bs)^{-n} \\ &\qquad + w^{-m-1}(-n)(w+bs)^{-n-1} \Big) e^{-w^2/2}\,dw \\ &= a^{-m-1}(a+b)^{-n}s^{-m-n-1}e^{-a^2s^2/2} - (m+1)I_{m+2,n} - nI_{m+1,n+1}. \end{aligned}$$