典型的連続関数の結び目点

斎藤新悟（九大数理）

本講演で述べる結果は，David Preiss (University of Warwick) との共同研究である．$I = [0,1]$ とし，Banach 空間 $C(I) = \{f\colon I \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ は連続}\}$ を考える．

定義 1
典型的 (typical, generic) な $f \in C(I)$ が性質 P を持つ（$\forall^* f \in C(I)\ \ P$ と書く）とは，集合 $\{f \in C(I) \mid f \text{ は性質 } P \text{ を持つ}\}$ が残留的であることをいう．

ここで，一般に位相空間の部分集合 A が**残留的** (residual, comeagre) であるとは，補集合 A^c がやせている (meagre, first category)，すなわち $A^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ を満たす疎 (nowhere dense) な A_n が存在することをいう．

本講演では，典型的な $f \in C(I)$ の性質について考察する．典型的な $f \in C(I)$ の性質としては，Banach, Mazurkiewicz によって 1931 年に独立に証明された定理「典型的な $f \in C(I)$ はいたるところ微分不可能である」がよく知られている．したがって，典型的な $f \in C(I)$ に対してその導関数を考えることはできないが，代わりに Dini 微分を考えることができる：

定義 2
$f \in C(I)$ の $x \in I$ における **Dini 微分** (Dini derivative) とは，

$$D^+ f(x) = \limsup_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \qquad D^- f(x) = \limsup_{h \uparrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$
$$D_+ f(x) = \liminf_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \qquad D_- f(x) = \liminf_{h \uparrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

で定義される $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ の元をいう．ただし，$0 \in I$ では $D^+ f(0)$, $D_+ f(0)$ のみ，$1 \in I$ では $D^- f(1)$, $D_- f(1)$ のみ定義する．

典型的な $f \in C(I)$ の Dini 微分については次の定理が知られている：

定理 3 (Jarník, 1933)
典型的な $f \in C(I)$ に対して，ほとんどすべての $x \in I$ において次が成立する：

$$D^+ f(x) = D^- f(x) = \infty, \qquad D_+ f(x) = D_- f(x) = -\infty.$$

このような点は，f が「最も微分不可能」な点と考えられ，結び目点と呼ばれる：

定義 4

$f \in C(I)$ とする．$x \in I$ が f の**結び目点** (knot point) であるとは，

$$D^+ f(x) = D^- f(x) = \infty, \qquad D_+ f(x) = D_- f(x) = -\infty$$

が成立することをいう．$f \in C(I)$ の結び目点**でない** I の点全体の集合を $N(f)$ と書く．

なお，I の端点においては定義できる 2 つの Dini 微分がそれぞれ ∞, $-\infty$ となるときに結び目点であるという．例えば，$0 \in I$ が $f \in C(I)$ の結び目点であるとは $D^+ f(0) = \infty$, $D_+ f(0) = -\infty$ が成立するということである．

記号 $N(f)$ を用いると，Jarník の定理は「典型的な $f \in C(I)$ に対して $N(f)$ は零集合である」と言い換えられる．Jarník の定理の自然な拡張として，どのような意味において「典型的な $f \in C(I)$ に対して $N(f)$ は小さい」といえるかという問題が考えられる．この問題は Preiss, Zajíček によって完全な特徴づけが得られた．この定理を述べるために，I の閉部分集合全体（すなわちコンパクト部分集合全体）の集合を $\mathcal{K}$ と書き，$\mathcal{K}$ に Hausdorff 距離を導入する．Hausdorff 距離によって，$\mathcal{K}$ はコンパクト距離空間になることが知られている．

定理 5 (Preiss & Zajíček, unpublished)

I 上の σ イデアル $\mathcal{I}$ に対して次は同値である：

(1) 典型的な $f \in C(I)$ に対して $N(f) \in \mathcal{I}$ が成立する．

(2) 典型的な $K \in \mathcal{K}$ が $\mathcal{I}$ に属する（すなわち $\mathcal{I} \cap \mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ が残留的）．

ここで，$\mathcal{I}$ が I 上の σ イデアルであるとは，$\mathcal{I}$ が I の空でない部分集合族で次が成立することをいう：

- $A \in \mathcal{I}$, $B \subset A$ ならば $B \in \mathcal{I}$.
- $A_n \in \mathcal{I}$ $(n \in \mathbb{N})$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{I}$.

I 上の σ イデアルは「小さい」集合全体の族と考えられる．

この定理を，σ イデアルとは限らない一般の I の部分集合族に拡張することを考える．すなわち，I の部分集合族 $\mathcal{S}$ に対して，「典型的な $f \in C(I)$ に対して $N(f) \in \mathcal{S}$」となるための必要十分条件を求める．任意の $f \in C(I)$ に対して $N(f)$ は F_σ 集合（可算個の閉集合の和集合）であることに注意すると，I の部分集合族としては F_σ 集合の族のみを考えればよいことが分かる．次がこの講演の主定理である：

定理 6 (Preiss & S.)

I の F_σ 部分集合の族 $\mathcal{F}$ に対して，以下は同値である：

(1) 典型的な $f \in C(I)$ に対して $N(f) \in \mathcal{F}$.

(2) 典型的な $(K_n) \in \mathcal{K}^{\mathbb{N}}$ に対して $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \in \mathcal{F}$.

ここで，$\mathcal{K}^{\mathbb{N}}$ は $\mathcal{K}$ の可算無限個の直積であり，直積位相を導入している．

この定理の証明は，次の補題のような $\mathscr{X}$ を構成することに帰着される：

補題 7

次の性質を持つ $\mathscr{X} \subset \mathcal{K}^{\mathbb{N}} \times C(I)$ が存在する：

(A) $\bigl((K_n), f\bigr) \in \mathscr{X}$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = N(f)$.

(B) $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}^{\mathbb{N}}$ が残留的ならば，典型的な $f \in C(I)$ に対して，ある $(K_n) \in \mathcal{A}$ が存在して $\bigl((K_n), f\bigr) \in \mathscr{X}$ が成立する．

(C) $\mathscr{X}$ は解析的である．

(D) 任意の $f \in C(I)$ に対して，$\bigl\{(K_n) \in \mathcal{K}^{\mathbb{N}} \bigm| \bigl((K_n), f\bigr) \in \mathscr{X}\bigr\}$ は有限置換について閉じている．

ここで，一般にポーランド空間 X の部分集合 A が**解析的** (analytic) であるとは，ポーランド空間 Y と $X \times Y$ の Borel 部分集合 B が存在して，A が B の第 1 成分への射影に一致していることである．また，$\mathcal{K}^{\mathbb{N}}$ の部分集合 $\mathcal{A}$ が**有限置換について閉じている** (closed under finite permutations) とは，$\{n \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) \neq n\}$ が有限集合であるような $\mathbb{N}$ 上の任意の置換 σ と任意の $(K_n) \in \mathcal{A}$ に対して $(K_{\sigma(n)}) \in \mathcal{A}$ が成立することである．

補題 7 の証明では，$\mathscr{X}$ を具体的に構成し，それらが性質 (A)–(D) を持つことを証明する．性質 (B) を示す際には，$C(I)$ 上で Banach-Mazur ゲームと呼ばれるゲームの必勝法を構成することで，典型的な $f \in C(I)$ についての性質を証明する．

以下では，補題 7 を仮定して定理 6 を証明する．まず，(2) $\Longrightarrow$ (1) は容易である：

定理 6 (2) $\Longrightarrow$ (1) の証明

$\mathcal{A} = \{(K_n) \in \mathcal{K}^{\mathbb{N}} \mid \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \in \mathcal{F}\}$ とおくと，仮定よりこれは残留的なので，補題 7 (B) より典型的な $f \in C(I)$ に対して，ある $(K_n) \in \mathcal{A}$ が存在して $\bigl((K_n), f\bigr) \in \mathscr{X}$ が成立する．このような f に対して，$\mathcal{A}$ の定義と補題 7 (A) より $N(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \in \mathcal{F}$ となるので，(1) が従う． ∎

逆を示すには次の 2 つの記述集合論における結果を用いる：

補題 8

ポーランド空間の解析的な部分集合は Baire の性質を持つ，すなわち開集合とやせた集合の対称差で書ける．

次の補題は位相的 0–1 法則と呼ばれている：

補題 9

$\mathcal{A} \subset \mathcal{K}^{\mathbb{N}}$ が有限置換について閉じており，Baire の性質を持つならば，$\mathcal{A}$ はやせているか残留的である．

定理 6 (1) $\Longrightarrow$ (2) の証明

仮定より $\{f \in C(I) \mid N(f) \in \mathcal{F}\}$ は残留的なので，これに含まれる稠密な G_δ 集合（可算個の開集合の共通部分）G が取れる．ここで

$$\mathcal{A} = \big\{(K_n) \in \mathcal{K}^{\mathbb{N}} \;\big|\; \big((K_n), f\big) \in \mathscr{X} \text{ なる } f \in G \text{ が存在する}\big\}$$

とおくと，G の定義と補題 7 (A) より $(K_n) \in \mathcal{A}$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \in \mathcal{F}$ なので，(2) を示すには $\mathcal{A}$ が残留的であることを示せば十分である．

$\mathcal{A} = \bigcup_{f \in G}\big\{(K_n) \in \mathcal{K}^{\mathbb{N}} \;\big|\; \big((K_n), f\big) \in \mathscr{X}\big\}$ なので，補題 7 (D) より $\mathcal{A}$ は有限置換について閉じている．また，$\mathcal{A}$ は $\mathscr{X} \cap (\mathcal{K}^{\mathbb{N}} \times G)$ の第 1 成分への射影なので補題 7 (C) よりこれは解析的であり，したがって補題 8 より Baire の性質を持つ．よって補題 9 より $\mathcal{A}$ はやせているか残留的である．

$\mathcal{A}$ がやせていると仮定して矛盾を導く．このとき $\mathcal{A}^c$ は残留的なので，補題 7 (B) より典型的な $f \in C(I)$ に対して，ある $(K_n) \in \mathcal{A}^c$ が存在して $\big((K_n), f\big) \in \mathscr{X}$ が成立する．これと，G が残留的であることより，ある $f \in G$, $(K_n) \in \mathcal{A}^c$ が存在して $\big((K_n), f\big) \in \mathscr{X}$ が成立するが，これは $\mathcal{A}$ の定義に反する． ∎