典型的連続関数の Dini 微分

斎藤新悟（九大数理）

1 Baire カテゴリー

定義 1.1（Baire カテゴリー）
X を位相空間とし，A をその部分集合とする．

(1) A が**疎** (nowhere dense) であるとは，$\operatorname{Int} \overline{A} = \emptyset$ であることをいう．
(2) A が**やせた集合** (meagre set) または**第 1 類集合** (set of first category) であるとは，$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ を満たす疎な集合 A_n $(n \in \mathbb{N})$ が存在することをいう．
(3) A が**残留集合** (residual set) であるとは，A^c がやせた集合であることをいう．

例 1.2 $\mathbb{R}$ において有限集合，Cantor 集合（あるいは fat Cantor set）は疎であり，$\mathbb{Q}$ は疎ではないやせた集合である．

注意 1.3 $\mathbb{R}$ において，やせた集合と Lebesgue 零集合の間に含意関係は存在しない．実際，$\mathbb{Q}$ を整列させて $\mathbb{Q} = \{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ とし，$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} B(q_n, 2^{-m-n})$（$B(a, r)$ は中心 a，半径 r の開球）とおくと，A は Lebesgue 測度 0 の残留集合であり，A^c は Lebesgue 測度 ∞ のやせた集合である．

これらの概念について最も基本的な定理が次の Baire のカテゴリー定理である：

定理 1.4（Baire のカテゴリー定理）
完備距離空間において，残留集合は稠密である．

本講演で中心となるのが次の概念である：

定義 1.5 位相空間 X の元 x に関する条件 $P(x)$ について，$\{x \in X \mid P(x)$ が成立する$\}$ が残留集合であるとき，**典型的な** (typical, generic) x に対して $P(x)$ が成立するといい，次の記号で表す：

$$\forall^* x \in X \ P(x).$$

注意 1.6 $\mathbb{Q}$ においては空集合が残留集合であり，このような位相空間では典型的な元を考えることに意味がない．したがって，典型的な元は主に完備距離空間において考える．

2　典型的連続関数

$C=\{f\colon [0,1]\longrightarrow \mathbb{R} \mid f\text{ は連続}\}$ に上限ノルムを与えた Banach 空間を考える．この空間の典型的な元がこの講演の考察対象である．典型的な $f\in C$ は悪い振る舞いをすることが多い．次はその最も簡単な例である：

命題 2.1 典型的な $f\in C$ はいたるところ非単調である，すなわち f が J 上単調であるような長さ正の部分区間 $J\subset I$ は存在しない．

証明 有理数を端点とする長さ正の部分区間 $J\subset I$ を任意に取ったとき，J 上で単調な $f\in C$ 全体の集合 C_J が内点を持たない閉集合であることを証明すればよい．

まず C_J が閉集合であることを証明する．C_J の元の列 $\{f_n\}$ が f に一様収束するときに $f\in C_J$ であることを証明すればよい．対称性より，必要ならば部分列を取ることによって f_n はすべて J 上単調増加であるとしてよい．このとき，$x<y$ なる任意の $x,y\in J$ と任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $f_n(x)\leqq f_n(y)$ なので，$n\to\infty$ として $f(x)\leqq f(y)$ を得る．

次に C_J が内点を持たないことを証明する．中心 $f\in C$，半径 $r>0$ の開球 $B(f,r)$ を任意に取ったとき，$B(f,r)\not\subset C_J$ であることを証明すればよい．Lipschitz 関数全体は C の稠密部分集合なので，f は Lipschitz 関数であるとしてよい．高さが r 未満，幅が J の長さ未満で，傾きの絶対値が f の Lipschitz 定数を超えるようなのこぎり型の関数を f に加えることにより，$B(f,r)\setminus C_J$ の元が得られる．∎

次の定理は典型的な $f\in C$ の性質として最もよく知られたものであろう：

定理 2.2 典型的な $f\in C$ はいたるところ微分不可能である．

3　典型的連続関数の Dini 微分

定理 2.2 より，典型的な $f\in C$ に対してその導関数 f' を考えることはできないが，その代わりに Dini 微分を考えることは可能である．

定義 3.1 $f\colon [0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$, $a\in[0,1]$ に対して，次のように定義する：

$$D^+f(a)=\limsup_{x\downarrow a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a},\quad D_+f(a)=\liminf_{x\downarrow a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\quad (0\leqq a<1),$$

$$D^-f(a)=\limsup_{x\uparrow a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a},\quad D_-f(a)=\liminf_{x\uparrow a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\quad (0<a\leqq 1).$$

これらを a における f の **Dini 微分** (Dini derivatives) と呼ぶ．これらは $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ の元である．

定理 3.2（Banach [Ba], Jarník [Ja], Mazurkiewicz [Ma]）
典型的な $f \in C$ は次の性質を持つ：
(1) $D^+f(0) = \infty$, $D_+f(0) = -\infty$, $D^-f(1) = \infty$, $D_-f(1) = -\infty$.
(2) 任意の $x \in (0,1)$ に対して,
- $D^+f(x) = \infty$, $D_-f(x) = -\infty$, $D_+f(x) \leqq D^-f(x)$ または
- $D_+f(x) = -\infty$, $D^-f(x) = \infty$, $D_-f(x) \leqq D^+f(x)$.

定義 3.3 $(d^+, d_+, d^-, d_-) \in \overline{\mathbb{R}}^4$ であって，条件

$$(d^+ = \infty,\, d_- = -\infty,\, d_+ \leqq d^-) \text{ または } (d_+ = -\infty,\, d^- = \infty,\, d_- \leqq d^+)$$

を満たすもの全体の集合を $\mathcal{D}$ と書く.

例 3.4 $(\infty, -\infty, \infty, -\infty), (\infty, \infty, \infty, -\infty), (\infty, 0, 0, -\infty) \in \mathcal{D}$.

定理 3.5（定理 3.2 (2) の書き換え）
$(d^+, d_+, d^-, d_-) \in \overline{\mathbb{R}}^4$ に対して，次の 2 つの条件を考える：
(1) 典型的な $f \in C$ に対してある $x \in (0,1)$ が存在して, $D^+f(x) = d^+$, $D_+f(x) = d_+$, $D^-f(x) = d^-$, $D_-f(x) = d_-$.
(2) $(d^+, d_+, d^-, d_-) \in \mathcal{D}$.
このとき (1) ならば (2) である.

さらに，Preiss は (2) ならば (1) も成立することを証明した.

定理 3.6（Preiss）
定理 3.5 の (1), (2) は同値である.

このことから，次のような問題が自然に考えられる：

問題 3.7 各 $(d^+, d_+, d^-, d_-) \in \mathcal{D}$ について，典型的な $f \in C$ に対して集合

$$\left\{x \in (0,1) \,\middle|\, D^+f(x) = d^+,\ D_+f(x) = d_+,\ D^-f(x) = d^-,\ D_-f(x) = d_-\right\}$$

はどのような性質を持つか？ 上の定理はこの集合が「空でない」という性質を持つことを示している.

4 典型的連続関数の結び目点

$\mathcal{D}$ の元のうち，$(\infty, -\infty, \infty, -\infty)$ は他の元と全く異なる性質を持つ.

定理 4.1（Jarník [Ja]）
典型的な $f \in C$ に対して，

$$\left\{x \in (0,1) \;\middle|\; D^+f(x) = \infty,\ D_+f(x) = -\infty,\ D^-f(x) = \infty,\ D_-f(x) = -\infty\right\}$$

は Lebesgue 測度 1 の残留集合である．

系 4.2 $(d^+, d_+, d^-, d_-) \in \mathcal{D} \setminus \{(\infty, -\infty, \infty, -\infty)\}$ ならば，典型的な $f \in C$ に対して，

$$\left\{x \in (0,1) \;\middle|\; D^+f(x) = d^+,\ D_+f(x) = d_+,\ D^-f(x) = d^-,\ D_-f(x) = d_-\right\}$$

は Lebesgue 測度 0 のやせた集合である．

Dini 微分が ∞, $-\infty$, ∞, $-\infty$ であるような点は結び目点と呼ばれる：

定義 4.3 $x \in [0,1]$ が $f \in C$ の**結び目点** (knot point) であるとは，
- $x \in (0,1)$ のときは $D^+f(x) = \infty$, $D_+f(x) = -\infty$, $D^-f(x) = \infty$, $D_-f(x) = -\infty$ が成立することをいう．
- $x = 0$ のときは $D^+f(x) = \infty$, $D_+f(x) = -\infty$ が成立することをいう．
- $x = 1$ のときは $D^-f(x) = \infty$, $D_-f(x) = -\infty$ が成立することをいう．

f の結び目点**でない** $[0,1]$ の点全体の集合を $N(f)$ と書く．

定理 4.4（定理 4.1 の言い換え）
典型的な $f \in C$ に対して，$N(f)$ は Lebesgue 測度 0 のやせた集合である．

5　$N(f)$ の小ささ

定理 4.4 より，典型的な $f \in C$ に対して，$N(f)$ は Lebesgue 測度および Baire カテゴリーの意味で小さいことが分かる．これを一般化して，いかなる意味において「典型的な $f \in C$ に対して $N(f)$ は小さい」といえるかを考える．「小さい集合全体の族」を定式化したのが次の σ イデアルである：

定義 5.1 $[0,1]$ 上の ***σ* イデアル** (σ-ideal) とは，$[0,1]$ の部分集合族 $\mathcal{I}$ であって以下の条件を満たすものをいう：
(1) $\emptyset \in \mathcal{I}$.
(2) $A \in \mathcal{I}$, $B \subset A$ ならば $B \in \mathcal{I}$.
(3) $A_n \in \mathcal{I}$ $(n \in \mathbb{N})$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{I}$.

Preiss, Zajíček は，$[0,1]$ 上の σ イデアル $\mathcal{I}$ で典型的な $f \in C$ に対して $N(f) \in \mathcal{I}$ となるものの特徴づけを与えた．その定理を述べるために $[0,1]$ の閉集合全体の族に距離を導入

する．

定義 5.2 $[0,1]$ の閉集合全体の族を $\mathcal{K}$ と書き，$K, L \in \mathcal{K}$ に対して $d(K,L) \in [0,1]$ を次のように定義する：$K, L \neq \emptyset$ のときは

$$d(K,L) = \inf\bigl\{r > 0 \bigm| B(K,r) \supset L,\ B(L,r) \supset K\bigr\}$$

とし，$K = \emptyset$ または $L = \emptyset$ のときは

$$d(K,L) = \begin{cases} 1 & (K,\, L \text{ のちょうど } 1 \text{ つが空集合}), \\ 0 & (K = L = \emptyset) \end{cases}$$

とする．このとき d は $\mathcal{K}$ 上の距離となり，**Hausdorff 距離** (Hausdorff metric) と呼ばれる．

命題 5.3 Hausdorff 距離 d によって $\mathcal{K}$ はコンパクト距離空間（したがって完備距離空間）になる．

この $\mathcal{K}$ 上の位相を用いて，Preiss, Zajíček の定理は次のように述べられる：

定理 5.4（Preiss and Zajíček [PZ]）
$[0,1]$ 上の σ イデアル $\mathcal{I}$ について次は同値である：
(1) 典型的な $f \in C$ に対して $N(f) \in \mathcal{I}$.
(2) $\mathcal{I} \cap \mathcal{K}$ は $\mathcal{K}$ の残留集合.

6　主定理：$N(f)$ の性質

定理 5.4 は，$[0,1]$ 上の σ イデアル $\mathcal{I}$ に対して「典型的な $f \in C$ に対して $N(f) \in \mathcal{I}$」となるための必要十分条件を与えている．この講演の主定理はこの定理を拡張し，$[0,1]$ の任意の部分集合族 $\mathcal{S}$ に対して「典型的な $f \in C$ に対して $N(f) \in \mathcal{S}$」となるための必要十分条件を与えるものである．

主定理を述べるために，まず $N(f)$ はあまり複雑な集合にはならないことに注意する．

定義 6.1 $[0,1]$ の部分集合 F が $\boldsymbol{F_\sigma}$ **集合** (F_σ set) であるとは，$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ を満たす閉集合 F_n $(n \in \mathbb{N})$ が存在することをいう．$[0,1]$ の F_σ 集合全体の族を $\mathcal{F}_\sigma$ と書く．

命題 6.2 任意の $f \in C$ に対して，$N(f)$ は F_σ 集合である．

したがって，「典型的な $f \in C$ に対して $N(f) \in \mathcal{S}$」であるかどうかを調べる際は $\mathcal{S}$ を $\mathcal{S} \cap \mathcal{F}_\sigma$ で置き換えてもよい．

$\mathcal{F}_\sigma$ によい位相を定めることはできないが，残留集合は次のように間接的に定義できる：

定義 6.3 $\mathcal{F}_\sigma$ の部分集合 $\mathcal{F}$ が**残留集合** (residual set) であるとは，集合

$$\left\{ (K_n) \in \mathcal{K}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \in \mathcal{F} \right\}$$

が $\mathcal{K}^{\mathbb{N}}$ の残留集合であることをいう.

σ イデアルに対して，$\mathcal{K}$ における残留性と $\mathcal{F}_\sigma$ における残留性は同値である：

命題 6.4 $[0,1]$ 上の σ イデアル $\mathcal{I}$ について次は同値である：
(1) $\mathcal{I} \cap \mathcal{K}$ は $\mathcal{K}$ の残留集合.
(2) $\mathcal{I} \cap \mathcal{F}_\sigma$ は $\mathcal{F}_\sigma$ の残留集合.

したがって，定理 5.4 より次が成立する：

系 6.5 $[0,1]$ 上の σ イデアル $\mathcal{I}$ について次は同値である：
(1) 典型的な $f \in C$ に対して $N(f) \in \mathcal{I}$.
(2) $\mathcal{I} \cap \mathcal{F}_\sigma$ は $\mathcal{F}_\sigma$ の残留集合.

この主張が一般の部分集合族に対しても成り立つことを主張するのが主定理である：

定理 6.6（主定理，Preiss and S. [PS]）
$[0,1]$ の部分集合族 $\mathcal{S}$ について次は同値である：
(1) 典型的な $f \in C$ に対して $N(f) \in \mathcal{S}$.
(2) $\mathcal{S} \cap \mathcal{F}_\sigma$ は $\mathcal{F}_\sigma$ の残留集合.

証明は [Sa] を参照.

参考文献

[Ba] S. Banach, *Über die Bairesche Kategorie gewisser Funktionenmengen*, Stud. Math. **3** (1931), 174–179.

[Ja] V. Jarník, *Über die Differenzierbarkeit stetiger Funktionen*, Fundam. Math. **21** (1933), 48–58.

[Ma] S. Mazurkiewicz, *Sur les fonctions non dérivables*, Stud. Math. **3** (1931), 92–94.

[PS] D. Preiss and S. Saito, *Knot points of typical continuous functions*, in preparation.

[PZ] D. Preiss and L. Zajíček, *On the differentiability structure of typical continuous functions*, unpublished work.

[Sa] S. Saito, *Knot points of typical continuous functions and Baire category in families of sets of the first class*, PhD thesis submitted to the University of London, available on the author's website: `http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~ssaito/eng/maths/thesis.pdf`.