典型的連続関数の Dini 微分

斎藤新悟 (Shingo SAITO)
九州大学大学院数理学研究院

1 Dini 微分と Denjoy-Young-Saks の定理

微分不可能な関数に対しては，微分係数の代わりに次のように Dini 微分を考えることができる：

定義 1.1 $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \in [0,1]$ に対して，次のように定義する：

$$D^+ f(x) = \limsup_{y \downarrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}, \qquad D_+ f(x) = \liminf_{y \downarrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \qquad (0 \leqq x < 1),$$
$$D^- f(x) = \limsup_{y \uparrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}, \qquad D_- f(x) = \liminf_{y \uparrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \qquad (0 < x \leqq 1).$$

これらを x における f の **Dini 微分** (Dini derivatives) と呼ぶ．これらは $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ の元である．

$D^+ f(x) = D_+ f(x)$ が成立するときこの共通の値を $f'_+(x)$ と書く $(0 \leqq x < 1)$．$f'_-(x)$ も同様に定義する $(0 < x \leqq 1)$．$D^\pm(x)$, $D_\pm(x)$ のうち定義されるものがすべて等しいとき，この共通の値を $f'(x)$ と書く．

$x = 0, 1$ においては Dini 微分のうちいくつかが定義されないため，以下では $(0,1)$ の点における Dini 微分を主に考える．

Dini 微分に関する最も重要な定理の 1 つが次の Denjoy-Young-Saks の定理である：

定理 1.2（Denjoy-Young-Saks の定理）
$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ とする．このとき，ほとんどすべての $x \in (0,1)$ に対して次のいずれかが成立する：

(1) $D^+ f(x) = D_+ f(x) = D^- f(x) = D_- f(x) \in \mathbb{R}$，すなわち f は x で微分可能．
(2) $D^+ f(x) = D_- f(x) \in \mathbb{R}$, $D^- f(x) = \infty$, $D_+ f(x) = -\infty$.
(3) $D^- f(x) = D_+ f(x) \in \mathbb{R}$, $D^+ f(x) = \infty$, $D_- f(x) = -\infty$.
(4) $D^\pm f(x) = \infty$, $D_\pm f(x) = -\infty$.

注意 1.3 この定理では，f の連続性や可測性は仮定する必要がない．歴史的には最初に Denjoy, Young が独立に連続関数について示し，次に Young が可測関数にまで拡張し，最後に Saks が任意の関数について証明した．証明は例えば [2] の §3.5 を参照．

Denjoy-Young-Saks の定理の威力を実感するため，この定理から直ちに従う 2 つの系を述べる．

系 1.4 $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ が単調増加ならば，ほとんどすべての $x \in (0,1)$ において f は微分可能である．

証明 任意の $x \in (0,1)$ に対して $D^{\pm}f(x), D_{\pm}f(x) \geqq 0$ なので，Denjoy-Young-Saks の定理で (2), (3), (4) が成立することはない．これより系が従う． ∎

系 1.5 任意の $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して集合 $\{x \in (0,1) \mid f'(x) = \infty\}$ は零集合である．

証明 $f'(x) = \infty$ なる $x \in (0,1)$ では Denjoy-Young-Saks の定理の (1), (2), (3), (4) のいずれも成立しないことから系が従う． ∎

2 Denjoy-Young-Saks の定理の変形

2.1 Denjoy-Young-Saks の定理の変形と典型的連続関数

Denjoy-Young-Saks の定理は次の形をしていた：

任意の $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ について，ほとんどすべての $x \in (0,1)$ に対して，…….

これを次のように変形すると，結論はどのように変えるべきであろうか：

(a) ほとんどすべての $x \in (0,1)$ について，任意の $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して，…….
(b) 任意の $x \in (0,1)$ について，ほとんどすべての $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して，…….
(c) ほとんどすべての $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ について，任意の $x \in (0,1)$ に対して，…….
(d) ほとんどすべての $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ について，ほとんどすべての $x \in (0,1)$ に対して，…….
(e) ほとんどすべての $x \in (0,1)$ について，ほとんどすべての $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して，…….

まず，一般の $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ を考えるのは非常に難しいので，以下では連続関数に限って考察することにする．連続な $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ 全体の集合を C とし，上限ノルムによって C を Banach 空間とみなす．このとき「ほとんどすべての $f \in C$」は次のように解釈する：

定義 2.1 **典型的** (typical) な $f \in C$ がある性質 P を満たすとは，稠密な開集合 $U_n \subset C$ $(n \in \mathbb{N})$ が存在して，任意の $f \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ が性質 P を満たすことをいう．

Baire のカテゴリー定理によって，$U_n \subset C$ $(n \in \mathbb{N})$ が稠密な開集合ならば $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ は稠密である．また，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して典型的な $f \in C$ が性質 P_n を満たすならば，典型的な $f \in C$ は任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して性質 P_n を満たす．

典型的な $f \in C$ の性質を調べる際には区分的に線形な関数や C^1 級関数がよく用いられる．ここで $f \in C$ が**区分的に線形** (piecewise linear) であるとは，$[0,1]$ の分割 $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$ が存在して

$$f(x) = \frac{f(a_j) - f(a_{j-1})}{a_j - a_{j-1}}(x - a_{j-1}) + f(a_{j-1}) \qquad (a_{j-1} \leqq x \leqq a_j,\ j = 1, \ldots, n)$$

が成立することをいう．区分的に線形な C の元全体の集合を PL と書き，C^1 級な C の元全体の集合を C^1 と書く．PL, C^1 は C の稠密な線形部分空間であり，$f \in \mathrm{PL}$ ならば $f'_+(x)$ $(0 \leqq x < 1)$, $f'_-(x)$ $(0 < x \leqq 1)$ が存在する．

C の開球，閉球をそれぞれ

$$B(f,r) = \{ g \in C \mid \|g-f\| < r \},\ \bar{B}(f,r) = \{ g \in C \mid \|g-f\| \leqq r \} \quad (f \in C,\ r > 0)$$

と書く．

以下の議論で写像 $C \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $(f,x) \longmapsto f(x)$ が連続であることをしばしば用いる．この連続性は不等式 $|f(x) - f_0(x_0)| \leqq |f_0(x) - f_0(x_0)| + \|f - f_0\|$ から従う．

2.2 (a) について

(a) については意味のある定理は存在し得ないことが次の命題から分かる：

命題 2.2 $d^\pm, d_\pm \in \overline{\mathbb{R}}$ が $d_+ \leqq d^+$, $d_- \leqq d^-$ を満たすならば，任意の $x \in (0,1)$ に対してある $f \in C$ が存在して，$D^\pm f(x) = d^\pm$, $D_\pm f(x) = d_\pm$ が成立する．

証明 まず，$d \in \overline{\mathbb{R}}$ に対して連続関数 $\varphi_d\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$\varphi_d(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & (d = \infty), \\ dx & (d \in \mathbb{R}), \\ -\sqrt{x} & (d = -\infty) \end{cases}$$

で定義すると $\varphi_d(0) = 0$, $(\varphi_d)'_+(0) = d$ が成立することに注意する．

$d^\pm, d_\pm \in \overline{\mathbb{R}}$ を命題のように取り，$x_0 \in (0,1)$ とすると，

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_{d^+}(x-x_0)\sin^2 \frac{1}{x-x_0} + \varphi_{d_+}(x-x_0)\cos^2 \frac{1}{x-x_0} & (x_0 < x \leqq 1), \\ 0 & (x = x_0), \\ \varphi_{d^-}(x_0-x)\sin^2 \frac{1}{x_0-x} + \varphi_{d_-}(x_0-x)\cos^2 \frac{1}{x_0-x} & (0 \leqq x < x_0) \end{cases}$$

で定義される $f \in C$ は $D^\pm f(x_0) = d^\pm$, $D_\pm f(x_0) = d_\pm$ を満たす． ∎

注意 2.3 同様の証明により，$d^+, d_+ \in \overline{\mathbb{R}}$ が $d_+ \leqq d^+$ を満たすならば，ある $f \in C$ が存在して，$D^+ f(0) = d^+$, $D_+ f(0) = d_+$ が成立することが分かる．$x = 1$ においても同様である．

2.3 (b), (e) について

(b), (e) については次の命題が成立する：

命題 2.4 任意の $x \in (0,1)$ について，ほとんどすべての $f \in C$ に対して $D^\pm f(x) = \infty$, $D_\pm f(x) = -\infty$ が成立する．

証明 対称性より，次を証明すれば十分である：任意の $x \in (0,1)$ に対して，ほとんどすべての $f \in C$ に対して $D^+ f(x) = \infty$ が成立する．以下 $x_0 \in (0,1)$ を 1 つ取って固定する．

$n^{-1} < 1 - x_0$ を満たす各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，次の条件を満たす $f \in C$ 全体の集合を A_n とする：ある $h \in (0, n^{-1})$ が存在して $f(x_0 + h) - f(x_0) > nh$ が成立する．命題を示すには，A_n が

すべて稠密な開集合であることを証明すればよい．以下 $n^{-1} < 1 - x_0$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ を 1 つ取って固定する．

A_n が開集合であることは，各 $h \in (0, n^{-1})$ に対して $\{f \in C \mid f(x_0 + h) - f(x_0) > nh\}$ が開集合であることから従う．

A_n が稠密であることを示すには，任意の $f \in \mathrm{PL}$, $\varepsilon > 0$ に対して $B(f, \varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset$ であることを証明すればよい．$\varphi \in \mathrm{PL}$ を $\|\varphi\| < \varepsilon$, $\varphi'_+(x_0) > n - f'_+(x_0)$ を満たすように取ると，$(f + \varphi)'_+(x_0) = f'_+(x_0) + \varphi'_+(x_0) > n$ なので $f + \varphi \in A_n$ であり，$\|\varphi\| < \varepsilon$ より $f + \varphi \in B(f, \varepsilon)$ であることも分かる．∎

注意 2.5 同様の証明により，ほとんどすべての $f \in C$ に対して $D^+ f(0) = D^- f(1) = \infty$, $D_+ f(0) = D_- f(1) = -\infty$ が成立することが分かる．

2.4 (c) について

(c) については次の命題が成立する：

命題 2.6（Banach, Jarník, Mazurkiewicz）
典型的な $f \in C$ について，任意の $x \in (0, 1)$ に対して次のいずれかが成立する：

- $D^+ f(x) = \infty$, $D_- f(x) = -\infty$, $D_+ f(x) \leqq D^- f(x)$.
- $D^- f(x) = \infty$, $D_+ f(x) = -\infty$, $D_- f(x) \leqq D^+ f(x)$.

この命題を示すため，補題をいくつか準備する．

補題 2.7 X を位相空間とし，Y をコンパクトな位相空間とする．このとき，U が $X \times Y$ の開部分集合ならば，$\bigcap_{y \in Y} \{x \in X \mid (x, y) \in U\}$ は開集合である．

証明 $A = \bigcap_{y \in Y} \{x \in X \mid (x, y) \in U\}$ とおき，任意の $x \in A$ を取る．各 $y \in Y$ に対して $(x, y) \in V_y \times W_y \subset U$ なる開集合 $V_y \subset X$, $W_y \subset Y$ が存在する．$Y = \bigcup_{y \in Y} W_y$ なので，Y のコンパクト性よりある $y_1, \ldots, y_n \in Y$ が存在して $\bigcup_{j=1}^{n} W_{y_j} = Y$ となる．このとき $x \in \bigcap_{j=1}^{n} V_{y_j} \subset A$ なので，A が開集合であることが従う．∎

補題 2.8 典型的な $f \in C$ について，任意の $x \in [0, 1)$ に対して $D^+ f(x) = \infty$ または $D_+ f(x) = -\infty$ が成立する．

証明 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，次の条件を満たす $f \in C$ 全体の集合を A_n とする：任意の $x \in [0, 1 - n^{-1}]$ に対してある $h \in (0, n^{-1})$ が存在して，$|f(x + h) - f(x)| > nh$ が成立する．補題を示すには，A_n がすべて稠密な開集合であることを証明すればよい．以下 $n \in \mathbb{N}$ を 1 つ取って固定する．

A_n が開集合であることは，各 $h \in (0, n^{-1})$ に対して

$$\left\{(f, x) \in C \times [0, 1 - n^{-1}] \;\middle|\; |f(x + h) - f(x)| > nh\right\}$$

が開集合であることと補題 2.7 から従う．

A_n が稠密であることを示すには，任意の $f \in \mathrm{PL}$, $\varepsilon > 0$ に対して $\overline{B}(f, \varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset$ であることを証明すればよい．f の傾きの絶対値の最大値を M とし，$2m\varepsilon > n + M$ なる $m \in \mathbb{N}$ を

取る．$\varphi \in \mathrm{PL}$ は周期 m^{-1} の周期関数で，$\varphi(x) = \varepsilon - \varepsilon|2mx - 1|$ $(0 \leqq x \leqq m^{-1})$ を満たすものとする．このとき $\|\varphi\| = \varepsilon$ なので $f + \varphi \in \bar{B}(f, \varepsilon)$ であり，任意の $x \in [0, 1 - n^{-1}]$ に対して

$$|(f+\varphi)'_+(x)| = |f'_+(x) + \varphi'_+(x)| \geqq |\varphi'_+(x)| - |f'_+(x)| \geqq 2m\varepsilon - M > n$$

なので $f + \varphi \in A_n$ を得る． ∎

補題 2.9 典型的な $f \in C$ について，任意の $x \in (0, 1)$ に対して次が成立する：

$$[D_+f(x), D^+f(x)] \cup [D_-f(x), D^-f(x)] = \overline{\mathbb{R}}.$$

証明 $n \geqq 2$, $p < q$ なる各 $n \in \mathbb{N}$, $p, q \in \mathbb{Q}$ に対して，次の条件を満たす $f \in C$ 全体の集合を $A_{n,p,q}$ とする：任意の $x \in [n^{-1}, 1 - n^{-1}]$ に対してある $h \in (-n^{-1}, n^{-1}) \setminus \{0\}$ が存在して，

$$p < \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < q$$

が成立する．補題を示すには，$A_{n,p,q}$ がすべて稠密な開集合であることを証明すればよい．以下 n, p, q を 1 組取って固定する．

$A_{n,p,q}$ が開集合であることは，各 $h \in (-n^{-1}, n^{-1}) \setminus \{0\}$ に対して

$$\left\{(f, x) \in C \times [n^{-1}, 1 - n^{-1}] \;\middle|\; p < \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < q\right\}$$

が開集合であることと補題 2.7 から従う．

$A_{n,p,q}$ が稠密であることを示すには，任意の $f \in C^1$, $\varepsilon > 0$ に対して $\bar{B}(f, \varepsilon) \cap A_{n,p,q} \neq \emptyset$ であることを証明すればよい．$M = \|f'\|$ とし，n より大きな $m \in \mathbb{N}$ を

$$(p, q) \subset \left[-\frac{4}{3}m\varepsilon + M, \frac{4}{3}m\varepsilon - M\right]$$

となるように取って $\varphi \in C$ を $\varphi(x) = \varepsilon \sin 2\pi mx$ で定義する．このとき $\|\varphi\| = \varepsilon$ より $f + \varphi \in \bar{B}(f, \varepsilon)$ なので，$f + \varphi \in A_{n,p,q}$ であることを証明すればよい．$x_0 \in [n^{-1}, 1 - n^{-1}]$ を任意に取って

$$S = \left\{\frac{(f+\varphi)(x_0+h) - (f+\varphi)(x_0)}{h} \;\middle|\; h \in (-n^{-1}, n^{-1}) \setminus \{0\}\right\}$$

とおいたとき，$S \cap (p, q) \neq \emptyset$ であることを示せばよいが，M の取り方と写像

$$h \longmapsto \begin{cases} \frac{(f+\varphi)(x_0+h) - (f+\varphi)(x_0)}{h} & \bigl(h \in (-n^{-1}, n^{-1}) \setminus \{0\}\bigr), \\ (f+\varphi)'(x_0) & (h = 0) \end{cases}$$

の連続性から，S が $-\frac{4}{3}m\varepsilon + M$ 以下の数と $\frac{4}{3}m\varepsilon - M$ 以上の数を元に持つことを証明すれば十分である．さらに，各 $h \in (-n^{-1}, n^{-1}) \setminus \{0\}$ に対して

$$\frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h} - M \leqq \frac{(f+\varphi)(x_0+h) - (f+\varphi)(x_0)}{h} \leqq \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h} + M$$

であることから，集合

$$T = \left\{ \frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h} \;\middle|\; h \in (-n^{-1}, n^{-1}) \setminus \{0\} \right\}$$

が $-\frac{4}{3}m\varepsilon$ 以下の数と $\frac{4}{3}m\varepsilon$ 以上の数を元に持つことを証明すれば十分である．

$k = \lfloor mx_0 \rfloor$ とおくと，$x_0 \in [n^{-1}, 1-n^{-1}] \subset (m^{-1}, 1-m^{-1})$ より $k = 1, \ldots, m-2$ である．$k/m \leqq x_0 < (2k+1)/2m$ すなわち $2k\pi \leqq 2\pi m x_0 < (2k+1)\pi$ のとき，

$$-n^{-1} < \frac{4k-1}{4m} - x_0 < 0 < \frac{4k+3}{4m} - x_0 < n^{-1}$$

であり，$\varphi(x_0) \geqq 0$ であることに注意すると

$$T \ni \frac{\varphi\left(\frac{4k+3}{4m}\right)-\varphi(x_0)}{\frac{4k+3}{4m}-x_0} \leqq \frac{-\varepsilon-0}{\frac{4k+3}{4m}-x_0} \leqq \frac{-\varepsilon}{\frac{4k+3}{4m}-\frac{k}{m}} = -\frac{4}{3}m\varepsilon,$$

$$T \ni \frac{\varphi\left(\frac{4k-1}{4m}\right)-\varphi(x_0)}{\frac{4k-1}{4m}-x_0} \geqq \frac{-\varepsilon-0}{\frac{4k-1}{4m}-x_0} \geqq \frac{-\varepsilon}{\frac{4k-1}{4m}-\frac{2k+1}{2m}} = \frac{4}{3}m\varepsilon$$

なのでよい．$(2k+1)/2m \leqq x_0 < (k+1)/m$ すなわち $(2k+1)\pi \leqq 2\pi m x_0 < 2(k+1)\pi$ のとき，

$$-n^{-1} < \frac{4k+1}{4m} - x_0 < 0 < \frac{4k+5}{4m} - x_0 < n^{-1}$$

であり，$\varphi(x_0) \leqq 0$ であることに注意すると

$$T \ni \frac{\varphi\left(\frac{4k+1}{4m}\right)-\varphi(x_0)}{\frac{4k+1}{4m}-x_0} \leqq \frac{\varepsilon-0}{\frac{4k+1}{4m}-x_0} \leqq \frac{\varepsilon}{\frac{4k+1}{4m}-\frac{k+1}{m}} = -\frac{4}{3}m\varepsilon,$$

$$T \ni \frac{\varphi\left(\frac{4k+5}{4m}\right)-\varphi(x_0)}{\frac{4k+5}{4m}-x_0} \geqq \frac{\varepsilon-0}{\frac{4k+5}{4m}-x_0} \geqq \frac{\varepsilon}{\frac{4k+5}{4m}-\frac{2k+1}{2m}} = \frac{4}{3}m\varepsilon$$

なのでよい． ∎

対称性より，補題 2.8, 2.9 から命題 2.6 が従う．

次の意味で，命題 2.6 は逆も成立する：

命題 2.10（Preiss）
$d^{\pm}, d_{\pm} \in \overline{\mathbb{R}}$ は次のいずれかを満たすとする：

- $d^+ = \infty$, $d_- = -\infty$, $d_+ \leqq d^-$.
- $d^- = \infty$, $d_+ = -\infty$, $d_- \leqq d^+$.

このとき，典型的な $f \in C$ に対して，ある $x \in (0,1)$ が存在して $D^{\pm}f(x) = d^{\pm}$, $D_{\pm}f(x) = d_{\pm}$ が成立する．

証明は [5] を参照．

2.5 (d) について

(d) については次の命題が成立する：

命題 2.11（Jarník）
典型的な $f \in C$ について，ほとんどすべての $x \in (0,1)$ に対して $D^{\pm} f(x) = \infty$, $D_{\pm} f(x) = -\infty$ が成立する．

証明は [1] を参照．

3 典型的連続関数の結び目点

3.1 典型的連続関数の結び目点

前節では $D^{\pm} f(x) = \infty$, $D_{\pm} f(x) = -\infty$ という条件がしばしば現れた．このような条件を満たす点を結び目点と呼ぶ．

定義 3.1 $x \in [0,1]$ が $f \in C$ の**結び目点** (knot point) であるとは，
- $x \in (0,1)$ のときは $D^{\pm} f(x) = \infty$, $D_{\pm} f(x) = -\infty$ が成立することをいう．
- $x = 0$ のときは $D^{+} f(x) = \infty$, $D_{+} f(x) = -\infty$ が成立することをいう．
- $x = 1$ のときは $D^{-} f(x) = \infty$, $D_{-} f(x) = -\infty$ が成立することをいう．

f の結び目点**でない** $[0,1]$ の点全体の集合を $N(f)$ と書く．

定理 3.2（定理 2.11 の言い換え）
典型的な $f \in C$ に対して，$N(f)$ は零集合である．

3.2 $N(f)$ の小ささ

定理 3.2 より，典型的な $f \in C$ に対して，$N(f)$ は Lebesgue 測度の意味で小さいことが分かる．これを一般化して，いかなる意味において「典型的な $f \in C$ に対して $N(f)$ は小さい」といえるかを考える．「小さい集合全体の族」を定式化したのが次の σ イデアルである：

定義 3.3 $[0,1]$ 上の $\boldsymbol{\sigma}$ **イデアル** (σ-ideal) とは，$[0,1]$ の部分集合族 $\mathcal{I}$ であって以下の条件を満たすものをいう：
(1) $\emptyset \in \mathcal{I}$.
(2) $A \in \mathcal{I}$, $B \subset A$ ならば $B \in \mathcal{I}$.
(3) $A_n \in \mathcal{I}$ $(n \in \mathbb{N})$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{I}$.

Preiss, Zajíček は，$[0,1]$ 上の σ イデアル $\mathcal{I}$ で典型的な $f \in C$ に対して $N(f) \in \mathcal{I}$ となるものの特徴づけを与えた．その定理を述べるために $[0,1]$ の閉集合全体の族に距離を導入する．

定義 3.4 $[0,1]$ の閉集合全体の族を $\mathcal{K}$ と書き，$K, L \in \mathcal{K}$ に対して $d(K,L) \in [0,1]$ を次のように定義する：$K, L \neq \emptyset$ のときは

$$d(K,L) = \inf\{r > 0 \mid B(K,r) \supset L,\ B(L,r) \supset K\}$$

とし，$K=\emptyset$ または $L=\emptyset$ のときは

$$d(K,L)=\begin{cases}1 & (K,\,L\text{ のちょうど 1 つが空集合}),\\ 0 & (K=L=\emptyset)\end{cases}$$

とする．このとき d は $\mathcal{K}$ 上の距離となり，**Hausdorff 距離** (Hausdorff metric) と呼ばれる．

命題 3.5 Hausdorff 距離 d によって $\mathcal{K}$ はコンパクト距離空間（したがって完備距離空間）になる．

証明は例えば [3, Theorem 4.26] を参照．

この $\mathcal{K}$ 上の位相を用いて，Preiss, Zajíček の定理は次のように述べられる：

定理 3.6（Preiss, Zajíček [6]）
$[0,1]$ 上の σ イデアル $\mathcal{I}$ について次は同値である：
(1) 典型的な $f\in C$ に対して $N(f)\in\mathcal{I}$ が成立する．
(2) 稠密な開集合 $\mathcal{U}_n\subset\mathcal{K}$ $(n\in\mathbb{N})$ が存在して，$\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathcal{U}_n\subset\mathcal{I}$ が成立する．

注意 3.7 この定理の (2) の条件は定義 2.1 の典型的連続関数の定義と対応している．一般に位相空間 X の部分集合 S が**残留的** (residual, comeagre) であるとは，稠密な開集合 $U_n\subset X$ $(n\in\mathbb{N})$ が存在して，$\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n\subset S$ が成立することをいう．この用語を用いると，典型的な $f\in C$ がある性質 P を満たすとは，P を満たす $f\in C$ 全体の集合が残留的であるということであり，上の定理の (2) の条件は $\mathcal{I}\cap\mathcal{K}\subset\mathcal{K}$ が残留的であるということである．

注意 3.8 定理 3.6 の (1) の条件を満たす $\mathcal{I}$ としては，Lebesgue 零集合全体，閉包が内点を持たないような集合の可算個の和集合で書けるような集合（このような集合を**やせた** (meagre) 集合という），Hausdorff 次元が 0 の集合全体などがある．特に定理 3.6 から定理 2.11 が従うことが分かる．

3.3 主定理：$N(f)$ の性質

定理 3.6 は，$[0,1]$ 上の σ イデアル $\mathcal{I}$ に対して「典型的な $f\in C$ に対して $N(f)\in\mathcal{I}$」となるための必要十分条件を与えている．次の定理はこの定理を拡張し，$[0,1]$ の任意の部分集合族 $\mathcal{S}$ に対して「典型的な $f\in C$ に対して $N(f)\in\mathcal{S}$」となるための必要十分条件を与えるものである：

定理 3.9（主定理，Preiss, S. [4]）
$[0,1]$ の部分集合族 $\mathcal{S}$ について次は同値である：
(1) 典型的な $f\in C$ に対して $N(f)\in\mathcal{S}$．
(2) 稠密な開集合 $\mathcal{U}_n\subset\mathcal{K}^{\mathbb{N}}$ $(n\in\mathbb{N})$ が存在して，任意の $(K_n)\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathcal{U}_n$ に対して $\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n\in\mathcal{S}$ が成立する．

証明は [7, Theorem 4.1.2] を参照．

定理 3.9 の (2) では，$\mathcal{S}$ の元のうち閉集合の可算個の和集合で書けるような集合（このような集合を $\boldsymbol{F_\sigma}$ **集合** (F_σ set) という）しか考察していない．これが妥当であることは，次の命題のように $N(f)$ と書ける集合はそのようなものしかないことから分かる：

命題 3.10 任意の $f \in C$ に対して，$N(f)$ は閉集合の可算個の和集合で書ける．

証明 $f \in C$ を 1 つ取って固定する．対称性より $\{x \in [0,1) \mid D^+f(x) < \infty\}$ が閉集合の可算個の和集合で書けることを証明すれば十分であり，これは

$$\{x \in [0,1) \mid D^+f(x) < \infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{h \in (0,n^{-1})} \{x \in [0, 1-n^{-1}) \mid f(x+h) - f(x) \leqq nh\}$$

から分かる． ∎

定理 3.6, 3.9 を比べると次の命題が成り立つことが分かる：

命題 3.11 $[0,1]$ 上の σ イデアル $\mathcal{I}$ について次は同値である：

(1) 稠密な開集合 $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{K}$ $(n \in \mathbb{N})$ が存在して，$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n \subset \mathcal{I}$ が成立する．

(2) 稠密な開集合 $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{K}^{\mathbb{N}}$ $(n \in \mathbb{N})$ が存在して，任意の $(K_n) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$ に対して $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \in \mathcal{I}$ が成立する．

この命題自体は定理 3.6, 3.9 よりもはるかに簡単に証明できる．証明は [7, Proposition 3.3.4] を参照．

参考文献

[1] V. Jarník, *Über die Differenzierbarkeit stetiger Funktionen*, Fundam. Math. **21** (1933), 48–58.

[2] R. Kannan and C. K. Krueger, *Advanced Analysis on the Real Line*, Universitext, Springer, 1996.

[3] A. S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Graduate Texts in Mathematics **156**, Springer-Verlag, 1995.

[4] D. Preiss and S. Saito, *Knot Points of Typical Continuous Functions*, in preparation.

[5] D. Preiss and L. Zajíček, *On Dini and Approximate Dini Derivates of Typical Continuous Functions*, Real Anal. Exch. **26** (2000/2001), no. 1, 401–412.

[6] D. Preiss and L. Zajíček, *On the Differentiability Structure of Typical Continuous Functions*, unpublished work.

[7] S. Saito, *Knot Points of Typical Continuous Functions and Baire Category in Families of Sets of the First Class*, PhD thesis submitted to the University of London, available on the author's website: `http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~ssaito/eng/maths/thesis.pdf`.