

# 数学基礎教育受講者の現状

東京工業大学大学院理工学研究科<sup>0)</sup> 山田光太郎

## 1. 昔話

その昔、筆者が学生だったころ<sup>1)</sup>、大学の理工系学部の教育課程はかなり無謀なものだったように思います。力学や電磁気学の授業では当たり前のように微分積分、微分方程式を使うのですが、数学の授業はまだ連続関数の性質を扱ったりしていて、順序が逆なのです。教員にとっても学生にとってもそれが当たり前で、適にごまかしながらもついて行ったのでした。むしろ、微分方程式やベクトル解析は、数学の授業としてよりも、物理の授業の中学んだ方が効率がよい、と明言される教員もありました。同感と思われる理工系学部の先生方は数多くいらっしゃるでしょう。もちろん「高等学校で習っていない」なんていうことは思慮の外にありましたし、学生もそういうことを言うのは沽券に関わる、という風潮でもあったようです。

それでは現在はどうか。高等学校と大学の間、大学基礎教育と専門教育の間のカリキュラムの整合性について、以前に比べてかなり議論・考慮されてきたと感じられます。しかし、九州大学理工系学部・学科の専攻教育の具体的なシラバスを拝見するかぎり、学生も数学的な部分でかなりつまづくのではないかと筆者が感じるものがまだ多数あるようです。

ここで、理工系の先生方にクイズです。次の挙げる項目のうち、2008年現在、高等学校で教えているものはどれでしょうか：

1. 多変数（2変数）程度の微積分
2. 簡単な（常）微分方程式 [ $dx/dt = \lambda x$ ; ( $\lambda$  は定数) 程度]
3. 空間の直線、平面の方程式
4. 2次行列の固有値
5. 複素平面
6. 正規分布

おわかりですよ。正解は「どれも教えていない」です<sup>2)</sup>。なるほど「ゆとり教育カリキュラム」なんだな、と納得しないでください。確かに5は直近の指導要領改訂でなくなりました<sup>3)</sup>が、3は前回の改訂からほとんど扱われなくなっていますし、2は1990年の学習指導要領改訂以降扱われなくなっています。1、4は筆者が知る限り、1971年以降高等学校で扱われたことはありません。

<sup>0)</sup> 原稿提出時（2009年1月）、九州大学大学院数理学研究院、2009年10月より現職。本稿のデータなどは原則として原稿提出時のものである。

<sup>1)</sup> 筆者は1961年8月13日（日曜日）生まれ

<sup>2)</sup> 正確には「学習指導要領に項目として挙げられていない」ということです。ごく一部の熱心な先生は教えておられるかもしれませんが、入学試験では学習指導要領を逸脱した問題を出題することができないので「進学指導」を盛んに行っている学校ではむしろ範囲外の指導をすることを嫌うかと思います。

<sup>3)</sup> 複素平面（高等学校ではなぜか複素数平面という）は1980年ころの高等学校学習指導要領では扱われていない。

理工系の研究者であれば普段、日常語として扱う数学的な内容ですが、大学に入学したばかりの学生さんにとっては初めて見るものなのだ、ということをお腹に命じましょう。数学の教員は入学試験に携わることが多いことから、このようなことは常識だと思いますが、それ以外の分野の先生方の中にはご存知ない方も多く見受けられます。とくに、新入生に対するカリキュラムを考える際には是非勉強しておいていただきたいと思います。

以前はそれでも何とか授業についていった、というご意見もありましょう。その通りです。しかし、実際に新入生のクラスに出ると、そのような学生は10%に満たないことがはっきりとわかります。言語として数学を用いる分野の学生を育てるために、基礎教育としての数学の授業が果たす役割がますます大きくなってきているように感じています。

## 2. 学力調査

高等学校で「何を教えていないか」（あるいは「何を教えているか）」ということをお腹見ました。しかし、現実には「あまり教わっていない」、「教わっても定着していない」となると、私たちがあまり気がつきません。以前と同様に教わっている項目でも、以前に比べて定着していない、という例が現場でいくつか観察されるようになったのはここ10年くらいのことでしょうか。とくに「ゆとり指導要領」の下で学習してきた学生が入学してくる2006年以降、学生がどのように変化していくかということは多くの教員の関心を引いていました。そこで、2002年度、数理学研究院ファカルティ・デベロップメント集会における梶原健司教授（当時助教授）の提案により、2003年度より研究院の業務の一環として大学新入生に数学基礎学力調査を開始し、現在に至っています<sup>4)</sup>。

この調査では、理工系<sup>5)</sup>の新入生に、微分積分または線形代数の最初の授業時間を利用して

- 高等学校で学ぶ内容の問題（記述式ではなく短答式のものを）を20問<sup>6)</sup>

を解いてもらい、データを集計しています。調査対象クラスは年度を追って増えていますが、2003年度から継続して調査しているクラス<sup>7)</sup>の学生数合計は、約300名となります。2003年度からの経年データが表1です。左の表は各年度全調査対象の平均点および高得点/低得点者の割合、右の表は2003年度から継続して調査しているクラス約300名の平均点などで、これら300名ほどのデータの得点累計と問題毎正答率のグラフを図1に掲げました。2006年度の現役新入生がいわゆる「ゆとり指導要領」の一期生です。結果から

<sup>4)</sup> 2006年度・2007年度は学内プロジェクト（九州大学教育研究プログラム・拠点形成プロジェクト）に採択された（同様の学力調査を続けてきた理学研究院物理学部門との共同のプロジェクト）。そこで、調査をほぼ全学科（各学科に複数のクラスがある場合は1クラス）に広げ、対象者を約1000名に拡大した。この年度より、採点・集計は九州大学大学院数理学府の学生アルバイト（約20名）に依頼することとした。その結果、それまで一月ほどかかっていた採点・集計が、一日で終了することになり、教員が授業を始める前に速報を出せるようになった。2009年度には再び学内プロジェクトに採用され、調査を継続している。本調査の詳細、および最新の結果については梶原健司教授（九州大学大学院数理学研究院）にたずねられたい。

<sup>5)</sup> 前期入学試験で数学Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、A、B、Cが課されている学部・学科の学生をここでは便宜的に「理工系」とよぶ。

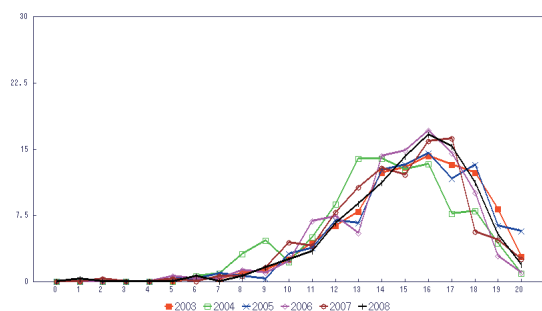
<sup>6)</sup> ほとんど教科書の「問い」（章末問題ではない）レベル。毎年継続して同一問題で調査を行っているため、現時点では問題は公開していませんが、興味のある方は梶原教授までご連絡ください。

<sup>7)</sup> 理学部数学科、生物学科；工学部電気情報工学科、エネルギー科学科、機械航空工学科；経済学部経済工学科。

表1 学力調査結果

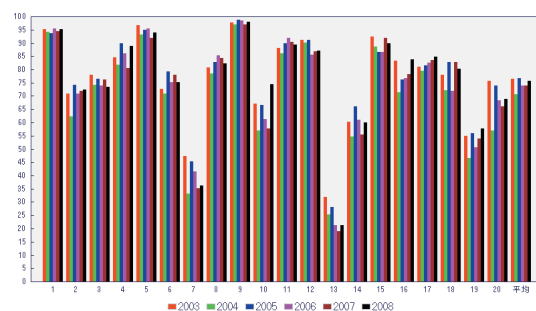
年度	全調査対象				継続調査対象			
	平均	現役	≤ 60%	≥ 90%	平均	現役	≤ 60%	≥ 90%
2003	15.2 (333)	15.1 (222)	17.1%	22.8%	15.3 (317)	15.2 (211)	16.1%	23.3%
2004	14.4 (430)	14.5 (283)	23.3%	14.2%	14.1 (323)	14.2 (217)	25.1%	13.3%
2005	14.7 (515)	14.7 (314)	23.9%	19.6%	15.3 (318)	15.4 (234)	16.4%	25.2%
2006	14.3 (994)	14.3 (710)	26.8%	13.8%	14.8 (310)	15.1 (238)	20.0%	13.9%
2007	14.3 (1067)	14.1 (751)	25.2%	11.8%	14.8 (321)	14.7 (244)	19.6%	12.8%
2008	14.3 (1053)	14.3 (746)	26.0%	13.2%	15.1 (320)	15.2 (249)	26.0%	13.2%

≤ 60%, ≥ 90%はそれぞれ得点60%以下, 90%以上の割合 括弧内は受験者数



(A) 得点分布

横軸は得点  $x$  ( $0 \leq x \leq 20$ ) 縦軸は得点  $x$  点の者の割合



(B) 問題毎の正答率

横軸は問題番号, 縦軸はその問題の正解者の割合

図1 継続調査対象の得点累計と問題毎正答率

- 平均点では2004年度が特に低いものの, 経年的にはっきりとした低下傾向は認められなかった。
- 高得点者 (得点90%以上) は, 減少傾向にあり, 低得点者 (得点60%以下) は増加傾向にある。さらに, 学科によっては成績の二極分化が起きているところもある。
- 正解者が多い問題, 少ない問題は年度毎に共通である。とくに正解者の少ない問題は, 正答率が低下している。

ということが見てとれます。九州大学に多くの新生を送っている, いわゆる「進学校」の多くの先生方は学力低下問題に危機感を持っておられるようで, 様々な工夫と努力をされていると伺っています。平均点の低下があまり見られないのはそのことによると考えられますが, 成績に広がりが出てきたのが少々気になります。高等学校で学んだはずの基礎知識が定着していない学生がある程度の割合でいる, ということを前提にカリキュラムを作成することが急務であると考えます。

### 3. 学生の質問

前節では, 集団としての新生生の学力動向を報告しました。しかし, それだけでは見えてこない「個人としての学生」を見ることも重要です。最近, 筆者の授業では「毎回の授業に対する質問」を提出してもらい, その回答をプリントにして配布しています<sup>8)</sup>。その中から全学共通教育 (線形

<sup>8)</sup> <http://www.official.kotaroy.com/class/> 以下, 各科目の「講義資料」の項にある。

代数)のクラスの学生さんからの質問・ご意見とその回答を紹介しましょう<sup>9)</sup>。以下で「質問」は学生さんからの質問(原則として原文のまま)、「お答え」は筆者の回答です。

## ■役に立つのかどうかが気になる

**質問**：工学の分野で行列やベクトルの概念を用いたものがあれば教えてください。

**お答え**：用いないものを探す方が難しい。図書館で工学の専門書(一般人向けの入門書やhow to本はだめ)を10冊以上眺めてごらんください。その中で、行列がでてこないものはどのくらいありますか？

**質問**：僕はナノテクの分野に興味がありますが、線形代数はナノテクにどう関係していますか。昨日の授業ではあまり深くやらなかったので、教えてください。

**お答え**：“ナノテクノロジー”、“行列”をキーワードにgoogleで検索をしてみたところ、14500件ヒットしました(2006年4月26日)。ナノテクノロジーの基礎理論となる量子力学は線形代数の言葉で書かれているので、そうなのだろうと思いますが。入門書や解説書ではなく、専門書を図書館でみてごらんください。

**質問**：数学と言う科目は、生活の中で実際の問題を解決するために作られたと言われています。行列または行列に関する計算は生活の中でどんな役割をはたすのか、教えていただけませんか。

**お答え**：生活が何を指すかわかりませんが、自然科学、社会科学、工学のあらゆる分野で自然に使われます。(中略、最初の質問への回答と同じ)もし、「生活」があなたの身の回りの生活のことを言っているのであれば、大抵の学問は関係ありませんが。

いずれも最初の時間の授業の後に来た質問です。最初の時間だけあって「ナノテクノロジーと線形代数は関係あるのでしょうか」などというかわいいものもあります。数学の勉強は面倒くさい、嫌なことだという**都市伝説**があつて<sup>10)</sup>、役に立たないならやらずに済まそう、ということなのでしょう。「自分で調べろ」という方針の回答ですが、調べ方を提案しました。専攻科目の先生からも「数学はこのように使う」というようなコメントをしていただけるとありがたいと思います。

二回目の授業以降も「日常に役に立つか」という質問はしばらく続きましたが、こういう回答をしていたらなくなりました<sup>11)</sup>。

<sup>9)</sup> 項目の選択は多分に恣意的である。

<sup>10)</sup> そういう伝説をばらまいた人は万死に値すると思う。

<sup>11)</sup> 「日常の役に立つのか」という問いが多かったので、全員に対して

あなたにとっての日常が何であるのか知りませんので、このようなご質問には答えられません。ちなみに、担当講師は日常的に「双曲空間の曲面論」(詳細は説明しない)を研究していますが、その際に行列は非常に重要です。そんな偏った例じゃないんだよ、一般人の日常だよ、という方もいらっしゃるでしょう。一般人の定義も難しいですが、そもそも大学まできて学ぶことが一般人にとっての日常であるはずがありません。「\*\*\*テクノロジーは△△△という製品に使われていて、日常に役に立つ」ということをよく聞くかも知れませんが、皆さんはそれで満足してはいけません。あたらしい「○○○テクノロジー」を創り出す立場なのですから。というコメントをしました。こういうことを言うから嫌われるのかも知れません。

## ■論理的なことに憧れるあるいは…

質 問：根本的なことをうたがうといえば， $1 + 1$ はなぜ2なのか。また数直線にはドットである1つ1つの数の集まりなのになぜ直線なのか。すき間はあいていないのか。

お答え：あまり根本的でないですね。もうすこし根本的なことを言えば，1とは何か，2とは何か，+とは何か，すき間とは何か，ではないでしょうか。応用上は，あまりはまらない方が健全ですが。

質 問：簡約な行列はなぜ1がある場所の上が全部0なんですか。

お答え：それが簡約な行列の定義だからです。

質 問：行列式と行列の区別はやっぱりはっきりとわかりません。

お答え：行列式は数，行列は表。

数学の授業は言葉の使い方によるさくなります。そうしないと，たとえば行列の「行」や「列」，「対角成分」という言葉すら正しく使ってくれません。後ろの2つの質問のように言葉の定義に対して「なぜ」という質問がくるので，さらに「定義」という言葉の意味を教えたりします。で，うるさくすると「じゃあ根本的にやろうぜ」という人がでてきたりします。が，その根本的がちっとも根本的でないので，空回りになってしまいます。応用上，どこまでを気にすべきで，どこからを気にしないでよいのか，というところが難しいと思います。あくまでも筆者の感想ですが，最近は「これは気にしなくてもよい」あるいは「直観どおりにやってもよい」という言葉が通じにくくなっているようです。幾何学的な直観が弱くなっていることと関連しているのかもしれませんが。

## ■計算

質 問：(注：○，◎，△には行列や連立方程式が具体的に書かれていたが省略) ○の連立方程式を◎として簡約な行列にしてみた所，△となりました。この連立方程式は解が無数にあるはずなのになぜこの行列は1つの解しか示さないのか。

お答え：計算が間違っているからです。

ここ数年，ずっと不思議に感じているのですが，自分は計算を間違えない，と思っている学生さんが目立ちます。計算がうまかったり得意だったりと言うわけではなく，普通に間違えるのですが，1回計算して結論を出してしまったらそれを疑わない。したがって「計算をうまくやる工夫」が存在することも知らない。

筆者が学生のころ(昔話ばかりでごめんなさい)は，大学新生は受験勉強で計算ばかり鍛えているから，「計算はできるが理屈は使えない」と言われていました。今は「計算もできない」人の割合が増えているように見えます。

## ■論理

質 問：「 $AB = O \Rightarrow \det A = 0 \text{ or } \det B = 0$ 」について， $AB = O$ のとき， $\det A = \det B = 0$ という可能性もあるので，このような書き方はいけないのではないか。

**お答え：**高等学校では数学における「または」の使いかたは教わらないのでしょうか。(以下略)

**質問：**2つの行が一致すれば  $\det = 0$  と習いましたが、3つの行やそれ以上、また全ての行が一致しているときも0ですか。

**お答え：**少なくとも2つの行は一致しているのだからもちろん0です。

だんだん嫌になってくるわけです。多くの学生はこの程度のことは大丈夫なのですが、毎回「無理やり」質問を出していただいているので、本当は分かっているが変なことを聞いてやろう、と思っているのかもしれない。

■**授業に対する希望など** 以下は授業に対する希望。「コメント」は筆者のコメント。

**希望：**出された問題をたまに先生が答えを出さないまま終わることがあるのですが、最後まで答えを導いてほしいです。答えが合ってるかどうか、どのように解けばいいのかわからないままにしているのがあります。

**コメント：**検算はできませんか？友達といっしょに考えてみましたか？それでも不安なら持っていらっしゃい。あるいは質問シートを使いましょう。

**希望：**演習量が少なくて、習ったことが身についているか不安です。自宅学習しかないのでしょうか。

**コメント：**週1回の授業では決定的に時間が不足です。少なくともさらに3時間くらいは費してください。それから、「さあ、やってください」といったときは、すかさず手を動かすこと！

授業時間中に演習を行うのが本来ですが、なかなか時間が足りません。一つには「手が動き始めるのが決定的に遅い」こと。答が欲しい、という人は依然多いようです。「過去問とその解答をくれ」と言われたこともあります。

皆さんがご覧になっている学生さんと比べていかがでしょうか。

#### 4. 連携に向けて

大学新入生は、ひとり一人が自分の志望や適性にあった(と考える)学科に入学して来ます<sup>12)</sup>。最近の中学校・高等学校は「キャリア教育」というものに熱心で、「総合的な学習の時間」を利用して自分の将来などを考えさせたりします。大学に入学したら、そういう夢に近づくために勉強したいのです。そこに立ちはだかる「教養課程の壁」。多くの学生がそうみなしてもしかたありません<sup>13)</sup>。だから、「線形代数や微積分は自分の将来の何に役に立つのか」という質問がでてくるのだし、いわゆる楽勝科目に学生が殺到するのです。

一方で、学力調査の結果や授業で出会う学生を見る限り、新入生の数学的・論理的な能力は決定

<sup>12)</sup> 九州大学ではごく一部の選抜方法を除いて、学生は希望する学部・学科を指定して入学している。

<sup>13)</sup> 学生時代の筆者はそう思っていましたし、いまもそれが間違っているとは思っていません。

的に不足しています。理工系の学科では生活に支障がでるケースもあるのではないのでしょうか。共通科目はそのような学生が少しでも数学の言葉が使えるよう手助けするためのものだと考えています。専攻教育の課程でもその内容を活用していただきたいと思います。

数学基礎教育に関して、筆者が感じている問題点は

学生と教員で、数学に対する意識レベルでの差が大きい

ということです。理工系の研究者にとっては（大学一年生程度の）数学は言葉・道具で「掛け算九九」のちょっと複雑なもの、という意識があると思うのですが、学生にとっては難しく専門的なものらしい。その結果、次のような現象が起きています：

- 学科によっては、低年次専攻教育科目でかなり進んだ数学を先取りして使うようなカリキュラムが組まれる<sup>14)</sup>。
- 学生が、何の役に立つのか聞きたがる<sup>15)</sup>。

専攻教育と共通教育の連携を考えるには、まずこのような現状の分析を行い、学生の状況についての情報交換をすることが必要と考えます。時間はかかると思いますが、学生を見据えた連携体制を構築していくしかないと思います。

## 5. 補足：基礎教育としての数学とその評価について

共通教育で学ぶ数学は理工系の「掛け算九九」です。ある程度、線形代数や微積分がわかる、たとえばテイラーの定理が使える、というような状態で学生を進級させたいと考えています。そういう意味で私たちが担当している科目は高等学校の学科目に近い性格を持っていると考えられます。昨今、共通教育での評価を「相対評価」にすべきである、という意見をよく伺いますが、このような性格の科目には相対評価は馴染みません。現在のように新入生の時点で学力が二極分化しつつあるケースでは、相対評価をすることで、到達度が不満足な（すなわち「掛け算九九」ができない）学生さんを専門課程に送ってしまう可能性があると考えます。その後のカリキュラムまで考慮した意味での評価ならば理解はできますが。したがって、共通教育での数学の評価はしかるべき到達度基準によって評価すべきであると結論づけられます。ご意見、ご反論などありましたら、お知らせいただければ幸いです。

## 参考文献

- [1] 九州大学基礎学力調査実施委員会「大学新入生の基礎学力調査」、九州大学教育研究プログラム・拠点形成プロジェクト「平成18年度問題に対応するための数学・理科基礎学力調査」報告書、2008年3月。

<sup>14)</sup> たとえば、水素原子のシュレジンガー方程式を解く、すなわち、ラプラシアン球面座標表示を使って変数分離をして、常微分方程式に直して解く、などということをして1年生の授業で扱っているのを見たことがあります。学生から質問されたので、しろうがなく、偏微分と変数変換の公式、それから常微分方程式の基本的なことを3時間くらい講義しました。新鮮な驚きでした。ちなみにノーギャラです。

<sup>15)</sup> 掛け算九九が何の役に立つか、は聞くだけナンセンスだと思うのですが。