局所マルチンゲールとバブル

九州大学院数理学府数理学専攻
修士課程 2 年
村上祐亮

指導教官：谷口説男　教授

2014 年 2 月 5 日

序

経済学的にバブルとは,「金融価格のうち経済の実態から離れて上昇した部分」つまり, 実際の金融価格が何らかの投機熱によって本来あるべき価格から離れて高くなっていることをいう. バブルが中身のない実態のない経済と言われる所以である. 観測されたバブルで最も古い例は,17 世紀オランダでのチューリップバブルが有名である. これはチューリップに対する投機熱が招いたバブルである. また, 20 世紀前半ではアメリカが急激な経済成長をし, 一般民衆の投機熱より株価が急上昇したが,1924 年 10 月 24 日の株価大暴落 (ブラックマンデー) によってバブルがはじけ世界恐慌となった歴史もある.

数学的に市場がバブルを持つことは, 割り引かれた金融価格過程が同値局所マルチンゲール測度の下でマルチンゲールでないことと定義される. このとき, 金融価格過程はこの確率測度の下で真に優マルチンゲールとなる.

$$E^Q[S_T|\mathcal{F}_t] < S_t,\ {}^\forall t \in [0,T]$$

これは, 未来の予想価格が現価格より真に小さくなるということであり, よって, この定義は金融価格が急下降する（バブルがはじける）ことをはらんでいる.

本論文では, バブルを持つ数理モデルをいくつか紹介する. これらのバブルを持つモデルでは, 有名なブラック・ショールズモデル以上の複雑な確率解析の道具と計算が必要となる. その部分を詳細に本論文では紹介する. さらに, バブルの下ではプット・コールパリティが成り立たず, 最低保証付きヨーロピアンデリバティブの価格が, バブルを持つことを含めたモデル上で拡張されることを紹介する.

目次

1　準備

この章では, 数理ファイナンスに必要となる確率論の準備をする. 以下, 時間集合を定数 $T > 0$ に対して $[0, T]$ とする.

1.1　確率過程

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする.

定義 1.1. (フィルトレーション) $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族 $\mathcal{F}_t$ が単調増大であるとき, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ をフィルトレーションといい, $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\})$ をフィルター付き確率空間という.

以下, フィルトレーション $\{\mathcal{F}_t\}$ は P -零集合をすべて含み, さらに右連続性:

$$\bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\epsilon} = \mathcal{F}_t$$

が成り立っていると仮定する.

定義 1.2. (確率過程) $t \in [0, T]$ に対して, それぞれ X_t が確率空間上の確率変数であるとき, その族 $X = \{X_t\}_{t \in [0,T]}$ を確率過程といい, $X = (X^1, \cdots, X^d) = \{(X_t^1, \cdots, X_t^d)\}_{t \in [0,T]}$ を d 次元確率過程という.

また, X が連続確率過程とは,

$$\text{任意の } \omega \in \Omega, \text{ で, } X_t(\omega) \text{ が } t \in [0, T] \text{ について連続}$$

であることをいう.

定義 1.3. (停止時刻) $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ が停止時刻であるとは, $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ $(t \geq 0)$ であることをいう.

定義 1.4. (マルチンゲール) $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\})$ をフィルター付き確率空間とする.

1. 確率過程 $\{X_t\}_{t \in [0,T]}$ が $\mathcal{F}_t$-適合過程であるとは, 任意の $t \geq 0$ に対し X_t が $\mathcal{F}_t$-可測であることをいう.

2. 確率過程 $\{X_t\}_{t \in [0,T]}$ が $\mathcal{F}_t$-マルチンゲールであるとは, X_t が $\mathcal{F}_t$-適合かつ, 任意の $t \geq 0$ に対し X_t が可積分であり, マルチンゲール性：任意の $t > s \geq 0$ に対し,

$$E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$$

をみたすことをいう．またこの式の等号が $\leq$ となるとき, $\mathcal{F}_t$-優マルチンゲール．$\geq$ となるとき, $\mathcal{F}_t$-劣マルチンゲールという．

3. 確率過程 $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ が $\mathcal{F}_t$-局所マルチンゲールであるとは, $\tau_n \nearrow \infty$ a.s. となる停止時刻の列 $\tau_n,\ n\in\mathbf{N}$ が存在し, $\{X_{t\wedge\tau_n}\}_{t\in[0,T]}$ が $\mathcal{F}_t$-マルチンゲールとなることをいう．

定理 1.1. (マルチンゲール不等式) X を確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上の p 乗可積分 $\mathcal{F}_t$-マルチンゲールもしくは, p 乗可積分非負劣 $\mathcal{F}_t$-マルチンゲールとすると, 以下が成り立つ．

$$(1)\ p\geq 1,\ \lambda>0 \text{ に対して，} \lambda^p P(\sup_{s\in[0,t]}|X_s|\geq\lambda)\leq E[|X_t|^p].$$

$$(2)\ p>1 \text{ に対して，} E[\sup_{s\in[0,t]}|X_s|^p]\leq\left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|X_t|^p].$$

ただし, X が p 乗可積分とは, 任意の $t\in[0,T]$ に対して $E[|X_t|^p]<\infty$ であることをいう．

定義 1.5. (ブラウン運動) 確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上で以下を満たす d 次元連続確率過程
$w=\{w_t\}_{t\in[0,T]}$ を, $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上の d 次元ブラウン運動という．
$j=1,2,\cdots,d$ として,

(1) $w_0^j(\omega)=0,\ {}^\forall\omega\in\Omega$

(2) $0=t_0<^\forall t_1<\cdots<t_n\ {}^\forall n\in\mathbf{N}$ に対して, 増分 $\{w_{t_i}^j-w_{t_{i-1}}^j\}_{1\leq i\leq n}$ が互いに独立で, それぞれ平均 0, 分散 t_i-t_{i-1} の正規分布に従う．

(3) $\{w^j\}_{1\leq j\leq d}$ が互いに独立である．

特に, 1 次元ブラウン運動を単にブラウン運動という．

さらにフィルター付き確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P,\{\mathcal{F}_t\})$ 上で, 各 $j=1,\cdots,d$ のブラウン運動 w^j が $\mathcal{F}_t$-適合で, $0\leq^\forall s\leq t$ に対して, $w_t^j-w_s^j$ と $\mathcal{F}_s$ が独立である時, これを d 次元 $\mathcal{F}_t$-ブラウン運動という．

2　伊藤解析

2.1　確率積分

定理 2.1. (Doob-Mayer 分解) X を連続な $\mathcal{F}_t$-劣マルチンゲールとし, $\mathcal{A}$ を有限な停止時刻全体の集合とする. 各 $a>0$ に対し, $\{X_{\sigma\wedge a}\}_{\sigma\in\mathcal{A}}$ が一様可積分性；

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{\sigma\in\mathcal{A}}E[|X_{\sigma\wedge a}|\ :\ |X_{\sigma\wedge a}|>N]=0$$

をみたすとき, 連続 $\mathcal{F}_t$-マルチンゲール $M=\{M_t\}$ と $A_0=0$ をみたす $\mathcal{F}_t$-適合連続増加過程 $A=\{A_t\}$ が存在し, $X_t=M_t+A_t\ (t\geq 0)$ と分解できる．

次のようなクラスを用意する．

$$\mathcal{M}_T:=\{M=\{M_t\}_{t\in[0,T]}|\ M \text{ は 2 乗可積分連続 } \mathcal{F}_t-\text{マルチンゲールで, } M_0=0 \text{ a.s.}\}$$

このとき, Jensen の不等式から $M^2 = \{M_t^2\}_{t\in[0,T]}$ は劣マルチンゲールとなり, さらに Doob-Meyer 分解 (定理 2.1) の条件を満たすので, これより, $\mathcal{F}_t$-適合連続増加過程 $A = \{A_t\}_{t\in[0,T]}$ が一意に定まる. よって, $M^2 - A$ という過程は連続 $\mathcal{F}_t$-マルチンゲール過程となることがわかる. この A_t を $\langle M\rangle_t$ と書き, $A = \langle M\rangle$ を M の 2 次変分とよぶ.

次に, $M, N \in \mathcal{M}_T$ に対し,

$$\langle M, N\rangle_t := \frac{1}{2}\left(\langle M+N\rangle_t - \langle M\rangle_t - \langle N\rangle_t\right),\ t \in [0,T]$$

とする. このとき, $\langle M, N\rangle$ は a.s. に有界変動であり, かつ $MN - \langle M, N\rangle$ はマルチンゲールとなる. この $\langle M, N\rangle$ を M と N の 2 次変分とよぶ.

定理 2.2. (Hilbert 空間) $M, N \in \mathcal{M}_T$ を $P(M_t = N_t = 1\ {}^\forall t \in [0,T]) = 1$ であるとき同一視することにすると, $(\mathcal{M}_T, E[\langle\ \cdot, \cdot\ \rangle_T])$ は実ヒルベルト空間となっている.

以下より確率積分を定義する.

第 1 段階

$$\mathcal{L}_0 = \{f = \{f_t\}_{t\in[0,T]} |\ f_t = \sum_{i=1}^{n} F^i 1_{(t_{i-1}, t_i]}(t)\ ,$$
$$0 = t_0 < \cdots < t_n = T,\ F^i : \mathcal{F}_{t_{i-1}} - \text{可測有界関数}\ \}$$

とおく. $f \in \mathcal{L}_0$ を単純過程という. これは $\mathcal{F}_t$ -適合過程であり, 確率積分を以下のように定める.

定義 2.1. （単純過程に対する確率積分）

$f \in \mathcal{L}_0,\ f_t = \sum_{i=1}^{n} F^i 1_{(t_{i-1}\ , t_i]}(t)$ $(0 = t_0 < \cdots < t_n = T)$ に対して, $I(f) = \{I_t(f)\}_{t\in[0,T]}$ を

$$I_t(f) = \int_0^t f_u dw_u := \sum_{i=1}^{n} F^i (w_{t_i \wedge t} - w_{t_{i-1}\wedge t}),\ t \in [0,T]$$

で定義し, f の w に関する確率積分と呼ぶ.

性質 2.1. （等長性）任意の $f, g \in \mathcal{L}_0$ に対して, 以下が成り立つ.

$I(f)$ は平均 0 の 2 乗可積分連続マルチンゲール

$$\langle I(f), I(g)\rangle_t = \int_0^t f_u g_u du,\ t \in [0,T]$$

第 2 段階

定義 2.2. (発展的可測) $t \in [0,T]$ に対し, 写像 $(s,\omega) \in ([0,t]\times\Omega, \mathcal{B}([0,t])\times\mathcal{F}_t) \mapsto f_s(\omega) \in (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ が可測であるとき, 確率過程 f は $\mathcal{F}_t$-発展的可測という. ただし $\mathcal{B}(A)$ は集合 A のボレル可測集合族とする.

次に,

$$\mathcal{L}_{2,T} := \{f = \{f_t\}_{t\in[0,T]} |\ \mathcal{F}_t - \text{発展的可測},\ E[\int_0^T f_t^2 dt] < \infty\}$$

と定め,$f \in \mathcal{L}_{2,T}$ に対して確率積分を定義する.

補題 2.1. (稠密性) $f \in \mathcal{L}_{2,T}$ に対して, $\lim_{n\to\infty} ||f^{(n)} - f||_T = 0$ を満たす近似列 $\{f^{(n)}\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{L}_0$ が存在する. ただし, $||f||_T^2 := E[\int_0^T f_t^2 dt]$ とおいた.

任意の $f \in \mathcal{L}_{2,T}$ に対して補題 2.1 から, $\lim_{n\to\infty} ||f^{(n)} - f||_T = 0$ を満たす $\{f^{(n)}\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{L}_0$ が存在する. このときそれぞれの $f^{(n)}$ に対して, $I(f^{(n)})$ を定義できるが, 命題 2.1 から, $I(f^{(n)}) - I(f^{(m)})$ はマルチンゲールであるので, マルチンゲール不等式 (定理 1.1) より,

$$\begin{aligned} E[\sup_{t\in[0,T]} |I_t(f^{(n)}) - I_t(f^{(m)})|^2] &\leq 4E[|I_T(f^{(n)}) - I_T(f^{(m)})|^2] \\ &= 4||f^{(n)} - f^{(m)}||_T^2 \end{aligned}$$

である. これより, $\{I(f^{(n)})\}_{n\in\mathbf{N}}$ が $\mathcal{M}_T$ 内のコーシー列であることが分かる.

従って, 定理 2.2 から $\mathcal{M}_T$ が (a.s. の同一視下で) 完備であるので, その極限が定まる. この極限の連続過程を, $I = \{I_t(f)\}_{t\in[0,T]}$, $I_t(f) = \int_0^t f_s dw_s$ と記し, これを $f \in \mathcal{L}_{2,T}$ のブラウン運動 w に関する確率積分とよぶ. これは, $f \in \mathcal{L}_{2,T}$ に対する $\mathcal{L}_0$ 上の近似列の取り方に依存しない.

確率積分の性質を以下記す.

性質 2.2. （等長性）任意の $f, g \in \mathcal{L}_{2,T}$ に対して, 以下が成り立つ.

$$I(f) \text{ は平均 } 0 \text{ の } 2 \text{ 乗可積分連続マルチンゲール}$$

$$\langle I(f), I(g)\rangle_t = \int_0^t f_u g_u du,\ t \in [0,T]$$

性質 2.3. (線形性) 任意の $f, g \in \mathcal{L}_{2,T}$ に対して,

$$I_t(af + bg) = aI_t(f) + bI_t(g),\ t \geq 0$$

が成り立つ.

第 3 段階

$$\mathcal{L}_2^{loc} := \{f = \{f_t\}_{t\in[0,T]} |\ \mathcal{F}_t - \text{発展的可測},\ \int_0^t f_u^2 du < \infty \text{ a.s. } t \in [0,T]\}$$

で定め, 任意の $f \in \mathcal{L}_{2,T}^{loc}$ に対して, 停止時刻を

$$\tau_n := \inf\{t \geq 0 |\ \int_0^t f_u^2 du \geq n\} \wedge T$$

で定義する.（$\inf \phi \wedge T = T$ で解釈する）さらに $f_t^{(n)} := f_t 1_{t \le \tau_n}$ とおく. このとき, $m \le n$ であれば, $\tau_m \le \tau_n$ で, $\tau_n \nearrow T$ a.s.$(n \to \infty)$ であることに注意して, $\int_0^t f_u dw_u$ を

$$(\int_0^t f_u dw_u) 1_{t \le \tau_n} := (\int_0^t f_u^{(n)} dw_u) 1_{t \le \tau_n}$$

と定義する. 実際, 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, $f^{(n)} \in \mathcal{L}_{2,T}$ であり, また, $m \le n$ に対して

$$(\int_0^t f_u^{(n)} dw_u) 1_{t \le \tau_m} = (\int_0^t f_u^{(m)} dw_u) 1_{t \le \tau_m}$$

であるから整合的に定義できている.

これによって定義される確率積分は線形性を満たし, 局所マルチンゲールとなっている.

w を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の d 次元 $\mathcal{F}_t$-ブラウン運動とするとき, 任意の $f \in \mathcal{L}_{2,T}^{loc}$ に対して, 各成分 $w^i (i = 1, \cdots, d)$ 毎に $I^i(f) = \int_0^\cdot f_t dw_t^i$ が定義できる.

性質 2.4. d 次元ブラウン運動の各成分の独立性から, 任意の $f, g \in \mathcal{L}_{2,T}$ に対し,

$$\langle I^i(f), I^j(g) \rangle_t = 0,\ t \in [0,T],\ (i \ne j) \text{ であり, 特に性質 2.2 によれば,}$$
$$E[I_t^i(f) I_t^j(g)] = \delta_{ij} E[\int_0^t f_u g_u du],\ t \in [0,T] \text{ となる.}$$

定理 2.3. (ブラウン運動の特徴付) $M_0 \equiv 0$ となる d 次元局所マルチンゲール確率過程 M が与えられているとする. このとき, M が d 次元 $\mathcal{F}_t$-ブラウン運動であるための必要十分条件は, $\langle M^i, M_t^j \rangle = \delta_{ij} t$ が任意の $1 \le i, j \le d,\ t \ge 0$ に対して成り立つことである.

2.2 伊藤過程

連続確率過程 X で

$$X_t = X_0 + M_t + A_t$$

と書かれているものを, 伊藤過程あるいは準マルチンゲールとよぶ.
(ただし, $X_0 \in \mathbf{R},\ M_t := \int_0^t \phi_u dw_u,\ A_t := \int_0^t \psi_u du,\ \phi \in \mathcal{L}_{2,T}^{loc},\ \psi \in \mathcal{L}_{1,T}^{loc}$ で定めている.)

定理 2.4. (伊藤の公式) $f \in \mathbf{C}^{1,2}([0,T] \times \mathbf{R}; \mathbf{R})$ とし, X を伊藤過程で上のように表されているとする. このとき, $\{f(t, X_t)\}_{t \in [0,T]}$ もまた伊藤過程であり,

$$\begin{aligned} f(t, X_t) = f(0, X_0) &+ \int_0^t f_x(u, X_u) \phi_u dw_u \\ &+ \int_0^t f_u(u, X_u) + f_x(u, X_u) \psi_u + \frac{1}{2} f_{xx}(u, X_u) \phi_u^2 du \end{aligned}$$

が成り立つ.

2.3 確率微分方程式

確率微分方程式とその結果について述べる.

σ : $[0,T]\times\mathbf{R}\times\Omega\to\mathbf{R}$

b : $[0,T]\times\mathbf{R}\times\Omega\to\mathbf{R}$ とし, それぞれ $\mathcal{B}([0,T])\otimes\mathcal{B}(\mathbf{R})\otimes\mathcal{F}_t$-可測であり, $\sigma(\cdot,x,\cdot),b(\cdot,x,\cdot)$ は $\mathcal{F}_t$-発展的可測であるとする.

このとき, 初期値 $x\in\mathbf{R}$ の確率微分方程式とは,

$$dX_t(\omega)=\sigma(t,X_t(\omega),\omega)dw_t(\omega)+b(t,X_t(\omega),\omega)dt,\ X_0=x$$

で表さられる確率過程 X の時間発展ダイナミクスを記述する方程式のことをいう. しばしば $\omega\in\Omega$ を省略する.

定義 2.3. (確率微分方程式の解) $X=\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ が上の確率微分方程式の解であるとは以下の条件をみたすこととする.

1. X は, X_0が $\mathcal{F}_0-$ 可測な $\mathcal{F}_t-$ 適合かつ連続確率過程.
2. $\{\sigma(t,X_t)\}_{t\in[0,T]}\in\mathcal{L}^{loc}_{2,T},\ \{b(t,X_t)\}_{t\in[0,T]}\in\mathcal{L}^{loc}_{1,T}$.
3. $X_t=X_0+\int_0^t\sigma(s,X_s)dw_s+\int_0^t b(s,X_s)ds$ a.s. $^\forall t\in[0,T]$ で表現される.

定理 2.5. (解の存在と一意性). 上の確率微分方程式で, 任意の $T>0$ に対し,

1. $|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|+|b(t,x)-b(t,y)|\le L_T|x-y|\qquad(^\forall t\in[0,T],\ ^\forall x,y\in\mathbf{R})$
2. $E[\int_0^T(|\sigma(t,0)|^2+|b(t,0)|^2)dt]<\infty$.

となる $L_T>0$ が存在するならば, この確率微分方程式は一意的な解をもつ.
(ただしここでの一意性は X,X' がその解であるとき, $P(X_t=X'_t,\ ^\forall t\ge 0)=1$ が成り立つこととする.)

例 2.1. (線形確率微分方程式) $a_t\in\mathcal{L}^{loc}_{2,T},\ b_t\in\mathcal{L}^{loc}_{1,T}$ として, 確率微分方程式

$$dX_t=X_t(a_tdw_t+b_tdt),\quad X_0>0 \tag{1}$$

を考える. この時, 定理 2.5 の条件を満たすとは限らないが, この確率微分方程式には一意解が

$$X_t=X_0\mathrm{e}^{\int_0^t a_udw_u+\int_0^t(b_u-1/2a_u^2)du} \tag{2}$$

で与えられる. 実際、式 (2) が式 (1) の解であることは伊藤の公式で確認でき, 一意性は, 次のように保障できる.

X, Y をそれぞれ式 (1) の解であるとし, X を式 (2) で表現できているものとする. このとき, 伊藤の公式から,

$$d(Y_t/X_t) = \frac{Y_t}{X_t}(\frac{dY_t}{Y_t} - \frac{dX_t}{X_t} - \frac{dX_t \cdot dY_t}{X_t Y_t} + \frac{dX_t \cdot dX_t}{X_t^2}) = 0$$

である. よって, $X_t = Y_t$ であることが分かる.(a.s. の同一視下で)

特に, 係数 σ, b が $\omega \in \Omega$ を含んでいない場合の確率微分方程式をマルコフ型確率微分方程式といい, マルコフ型確率微分方程式の解 X はマルコフ性をもつ.

確率指数過程 $Z := \{\mathcal{E}(\int \theta dw)_t\}_{t \in [0,T]}$ (ただし, $\theta \in \mathcal{L}_{2,T}^{loc}$) は, 初期値 1 の正値局所マルチンゲールとなっていることが伊藤の公式で分かるが, 今これがマルチンゲールであると仮定する.
ただし,

$$\mathcal{E}(X)_t := \mathrm{e}^{X_t - 1/2\,\langle X \rangle_t}$$

とおいている.

この時, 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ 上に P と同値な確率測度 Q^θ を

$$Q^\theta :\ \mathcal{F}_T \ni A \mapsto Q^\theta(A) := E[\mathcal{E}(\int \theta dw)_T 1_A] \in [0,1] \tag{3}$$

で定義することができ, 以下の丸山・ギルザノフの定理が成り立つ.

定理 2.6. (丸山・ギルザノフの定理) 確率指数過程 Z がマルチンゲールであるとする. このとき, 式 (3) で確率測度 Q^θ を定義すれば, その下で,

$$w_t^\theta := w_t - \int_0^t \theta_u du,\ t \in [0,T]$$

は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}_T, Q^\theta)$ 上の $\mathcal{F}_t$-ブラウン運動となる.

3　バブル

w を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上のブラウン運動とし, フィルトレーションを $\mathcal{F}_t = \sigma(w_u; u \in [0,t]) \vee \mathcal{N}$ で定義し,$\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$ とする. ただし, $\mathcal{N} := \{A \subset \Omega | B \in \mathcal{F}$ で $B \supset A, P(B) = 0$ を満たすものが存在 $\}$ とする.

連続確率過程 $S = \{S_t\}_{t \in [0,T]}$ を金融価格過程とする. さらに, この S は安全過程 $B = \{B_t\}_{t \in [0,T]}$ で既に割り引かれたものとする.

定義 3.1. (同値局所マルチンゲール測度)
P と同値な $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ 上の確率測度で, 割り引かれた金融価格過程 S がその下で局所マルチンゲールであるとき, それを同値局所マルチンゲール測度という.

以後, 同値局所マルチンゲール測度が存在すると仮定し, それを Q と記す.

定義 3.2. (バブル) 金融価格過程 $S = \{S_t\}_{t \in [0,T]}$ がバブルを持つとは, S が Q の下で Strict に局所マルチンゲールであることをいう.
ここで, Strict に局所マルチンゲールとは, S は局所マルチンゲールであるが, マルチンゲールでないことをいう.

3.1　バブルを持たない市場モデル (標準マーケットモデル)

金融価格過程 S を

$$dS_t = S_t(\sigma_t dw_t + \mu_t dt),\ S_0 > 0$$

で定義する. ただし, $\sigma \in \mathcal{L}^{loc}_{2,T},\ \mu \in \mathcal{L}^{loc}_{1,T}$ とする. このとき, 伊藤の公式よりその解は次の表示式となる.

$$S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t \sigma_u dw_u + \int_0^t \mu_u - \frac{1}{2}\sigma_u^2 du\right)$$

この時以下を仮定する.

[1]　$P(\sigma_t$は任意の時刻 $t \in [0,T]$ で可逆である$) = 1$.
[2]　$\lambda_t := \sigma_t^{-1}\mu_t,\ \lambda = \{\lambda_t\}_{t\in[0,T]}$で定められるリスクプレミアム過程が有界.

この下で、次が成り立つ.

定理 3.1. (同値局所マルチンゲール測度) このモデルの同値局所マルチンゲール測度 Q は,

$$Q(A) := E[\mathcal{E}(-\int \lambda dw)_T 1_A],\ A \in \mathcal{F}_T$$

で一意に与えられ, また,

$$w_t^Q := w_t + \int_0^t \lambda_u du,\ t \in [0,T]$$

はこの確率測度 Q の下でブラウン運動 (Q-ブラウン運動) である.

証明. [3] により従う. □

Q を定理 3.1 で定義された同値局所マルチンゲール測度とする.

満期日 T でペイオフ F のヨーロピアンデリバティブを考える. ただし, F は非負 $\mathcal{F}_T-$ 可測確率変数で

$$F \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$$

を満たす.

このとき, 時刻 t でのデリバティブの価格を

$$x_t^F := E^Q[F|\mathcal{F}_t]$$

で定める. また, $K \geq 0$ で定められるヨーロピアンコールオプションの時刻 t での価格を $C_t(K)$, プットオプションの価格を $P_t(K)$ とする. すなわち,

$$\begin{aligned} C_t(K) &:= E^Q[(S_T - K)^+|\mathcal{F}_t] \\ P_t(K) &:= E^Q[(K - S_T)^+|\mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

とする.

この時次が成り立つ.

定理 3.2. (プット・コールパリティ) S が Q の下マルチンゲールであるとき,

$$C_t(K) - P_t(K) = S_t - K$$

が成り立つ.

これはプット・コールパリティと呼ばれる関係式である.

証明. 一般に,

$$(x-K)^+ - (K-x)^+ = (x-K)$$

であるから,

$$\begin{aligned} C_t(K) - P_t(K) &= E^Q[(S_T-K)^+|\mathcal{F}_t] - E^Q[(K-S_T)^+|\mathcal{F}_t] \\ &= E^Q[S_T|\mathcal{F}_t] - K \end{aligned}$$

となる. 従って S が Q の下でマルチンゲールであるならば

$$E^Q[S_T|\mathcal{F}_t] = S_t$$

であるから, プット・コールパリティは成立する. □

3.1.1 ブラック・ショールズモデル

ボラティリティ行列が,

$$\sigma \ : \ [0,T] \to \mathbf{R}$$

と, 決定的な過程で与えられ, 全ての $t \in [0,T]$ でこれが可逆であるとする. この時, 金融価格過程 S が満たす確率微分方程式は,

$$dS_t = S_t \sigma_t dw_t^Q, \ S_0 > 0 \tag{4}$$

で書かれる.

このモデルはブラック・ショールズモデルと言われていて, よく調べられている.

確率微分方程式 (4) は一意解をもち.

$$S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t \sigma_u dw_u^Q - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_u^2 du \right)$$

である.

特に, ペイオフ F が, $f \ : \ \mathbf{R}_{++} \to \mathbf{R}$ を用いて,

$$F = f(S_T)$$

と表さられるヨーロピアンデリバティブを考える.

S がマルコフ型確率微分方程式の解であるので,

$$V(t,x) := E^Q[f(S_{T-t}^{(t,x)})]$$

で定めれば, そのマルコフ性から

$$V(t,S_t) = E^Q[F|\mathcal{F}_t] \tag{5}$$

と表現される. ただし, $S^{(t,x)}$ とは出発時刻 t, 初期値 x の過程で,

$$S_u^{(t,x)} = x\exp\left(\int_0^u \sigma_{t+s}dw_s^Q - \frac{1}{2}\int_0^u \sigma_{t+s}^2 ds\right),\ u \in [0, T-t]$$

である. 従って,

$$x_t^F = V(t, S_t) \tag{6}$$

であることが分かる.

また, Q の下で, 確率変数 $\int_0^u \sigma_{t+s}dw_s^Q$ は, 平均が 0 で, 分散 $\delta_u^2 := \int_0^u \sigma_{t+s}^2 ds$ の正規分布に従う. ゆえに,

$$\begin{aligned}
E^Q[S_T|\mathcal{F}_t] &= E^Q[S_{T-t}^{(t,S_t)}] \\
&= x\exp\left(\frac{-\delta_{T-t}^2}{2}\right)E^Q[\mathrm{e}^{\int_0^{T-t}\sigma_{t+s}dw_s^Q}]_{|x=S_t} \\
&= x\exp\left(\frac{-\delta_{T-t}^2}{2}\right)\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_{T-t}^2}}\exp\left(\frac{-1}{2\delta_{T-t}^2}(y-\delta_{T-t}^2)^2\right)dy\exp\left(\frac{\delta_{T-t}^2}{2}\right)_{|x=S_t} \\
&= S_t
\end{aligned} \tag{7}$$

であるから, S が Q の下でマルチンゲールあることが分かる.

さらに, 式 (5), 式 (6) から

$$\begin{aligned}
x_t^F &= V(t, S_t) \\
&= E^Q[f(S_{T-t}^{(t,x)})]_{|x=S_t} \\
&= \int_{\mathbf{R}} f\left(x\exp\left(\frac{-\delta_{T-t}^2}{2}+y\right)\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_{T-t}^2}}\exp\left(\frac{-y^2}{2\delta_{T-t}^2}\right)dy_{|x=S_t}
\end{aligned}$$

であるので, ヨーロピアンコールオプション, プットオプションの価格を以下のように具体的に計算できる.

[コールオプション]

$$\begin{aligned}
C_t(K) &:= V(t, S_t) \\
&= \int_{\mathbf{R}}\left(x\exp\left(y-\frac{\delta_{T-t}^2}{2}\right)-K\right)^+\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_{T-t}^2}}\exp\left(\frac{-y^2}{2\delta_{T-t}^2}\right)dy_{|x=S_t} \\
&= \int_{\mathbf{R}}\left(x\exp\left(\delta_{T-t}z-\frac{\delta_{T-t}^2}{2}\right)-K\right)^+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-z^2}{2}\right)dz_{|x=S_t} \\
&= \int_{c(t,x)}^{\infty}\left(x\exp\left(\delta_{T-t}z-\frac{\delta_{T-t}^2}{2}\right)-K\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-z^2}{2}\right)dz_{|x=S_t} \\
&= x\int_{d(t,x)}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-u^2}{2}\right)du - K\int_{c(t,x)}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-z^2}{2}\right)dz_{|x=S_t} \\
&= S_t\Phi(-d(t,S_t)) - K\Phi(-c(t,S_t)).
\end{aligned}$$

[プットオプション]

$$
\begin{aligned}
P_t(K) &= \int_{\mathbf{R}} \left(K - x\exp\left(y - \frac{\delta_{T-t}^2}{2} \right) \right)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_{T-t}^2}} \exp\left(\frac{-y^2}{2\delta_{T-t}^2} \right) dy_{|x=S_t} \\
&= K\Phi(c(t, S_t)) - S_t\Phi(d(t, S_t)).
\end{aligned}
$$

ただし,

$$
c(t, x) := \frac{1}{\delta_{T-t}} \left(\log\frac{K}{x} + \frac{1}{2}\delta_{T-t}^2 \right),\ d(t, x) := c(t, x) - \delta_{T-t}
$$

とおいている. これより,

$$
\begin{aligned}
C_t(K) - P_t(K) &= S_t\Phi(-d(t, S_t)) - K\Phi(-c(t, S_t)) - K\Phi(c(t, S_t)) + S_t\Phi(d(t, S_t)) \\
&= S_t(\Phi(-d(t, S_t)) + \Phi(d(t, S_t))) - K(\Phi(-c(t, S_t)) + \Phi(c(t, S_t))) \\
&= S_t - K
\end{aligned}
$$

となり, プット・コールパリティが成立する.

一般に標準マーケットモデルで以下が成り立つことが知られている.

時刻 0 で初期資産 $x \in \mathbf{R}$ で戦略 $\xi \in \mathcal{L}_{2,T}^{loc}$ に対して, その富過程 $W^{(x.\xi)}$ を

$$
W_t^{(x,\xi)} := x + \int_0^t \xi_u dS_u,\ t \in [0, T]
$$

で与える.(これは線形確率微分方程式 $dW_t = \xi_t dS_t + (W_t - \xi_t S_t)dt,\ W_0 = x$ の解であり, この富過程は Self-finanncing 過程となる.)

許容される戦略を

$$
\begin{aligned}
\underline{\mathcal{A}}_T := \{\xi : [0, T] \times \Omega \to \mathbf{R} |\ \mathcal{F}_t - \text{発展的可測},\ \sigma\xi \in \mathcal{L}_{2,T}^{loc}, \\
\lim_{k\to\infty} kQ(\inf_{t\in[0,T]} W_t^{(x,\xi)} < -k) = 0,\ x \in \mathbf{R}\}
\end{aligned}
$$

で定義する.

補題 3.1. 任意の $x \in \mathbf{R}$ と $\xi \in \underline{\mathcal{A}}_T$ によって作られる富過程 $W^{(x,\xi)}$ は Q の下で優マルチンゲールとなる.

証明. $x = 0$ として示せば充分である.

$W = W^{(0,\xi)}$ は定義から,Q の下で局所マルチンゲールである. ここで,

$$
\begin{aligned}
\tau_n &:= \inf\{t > 0 \mid |W_t| > n\} \wedge T \\
\rho_k &:= \inf\{t > 0 \mid W_t < -k\} \wedge T
\end{aligned}
$$

で定める. この時, $\tau_n \nearrow T$ a.s. であるので, Fatou の補題と $\{W_{t\wedge\tau_n}\}_{t\in[0,T]}$ のマルチンゲール性より, $s \le t$ として,

$$
\begin{aligned}
E[W_{t\wedge\rho_k}|\mathcal{F}_s] &\le \liminf_{n\to\infty} E[W_{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k}|\mathcal{F}_s] \\
&= \liminf_{n\to\infty} W_{s\wedge\tau_n\wedge\rho_k} = W_{s\wedge\rho_k}
\end{aligned}
$$

となる. これより,

$$
E[W_{t\wedge\rho_k} : A] \le E[W_{s\wedge\rho_k} : A],\ A \in \mathcal{F}_s \tag{8}
$$

を得る.
一方,

$$
\begin{aligned}
E[W_{t\wedge\rho_k} : A] &= E[W_{t\wedge\rho_k} : A \cap \{\rho_k \ge t\}] + E[W_{t\wedge\rho_k} : A \cap \{\rho_k < t\}] \\
&= E[W_t : A \cap \{\rho_k \ge t\}] - kQ(A \cap \{\rho_k < t\})
\end{aligned}
$$

である. ここで, $k \to \infty$ とすれば,

$$
\begin{aligned}
&\cdot\ E[W_t : A \cap \{\rho_k \ge t\}] \to E[W_t : A], \\
&\cdot\quad kQ(A \cap \{\rho_k < t\}) \le kQ(\{\rho_k < t\}) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \le kQ(\inf_{u\le T} W_u < -k) \to 0
\end{aligned}
$$

である. ゆえに,

$$
E[W_{t\wedge\rho_k} : A] \to E[W_t : A],\ (k \to \infty)
$$

を得る.
　同様に,

$$
E[W_{s\wedge\rho_k} : A] \to E[W_s : A],\ (k \to \infty)
$$

を得る.
従って, 式 (8) から,

$$
E[W_t : A] \le E[W_s : A],\ A \in \mathcal{F}_s
$$

となる. □

　また,

$$
\begin{aligned}
\underline{x}^F &:= \sup\{x \in \mathbf{R} |\ ある\xi \in \underline{\mathcal{A}}_T\ で\ F + W_T^{-x,\xi} \ge 0\} \\
\bar{x}^F &:= \inf\{x \in \mathbf{R} |\ ある\xi \in \underline{\mathcal{A}}_T\ で\ -F + W_T^{x,\xi} \ge 0\}
\end{aligned}
$$

と定義すれば, 以下が成り立つ.

定理 3.3. (ヨーロピアンデリバティブにおける無裁定価格理論)

1 $x_0^F = \underline{x}^F = \bar{x}^F$

2 F の完全複製戦略が存在する. すなわち, $F = W_T^{x_0^F, \xi^F}$ を満たす $\xi^F \in \underline{\mathcal{A}}_T$ が唯一存在する. また, このポートフォリオの組 (x_0^F, ξ^F) による完全複製ポートフォリオの富過程は

$$W_t^{x_0^F, \xi^F} = E^Q[F|\mathcal{F}_t]$$

が成り立つ.

3 複製コスト x^F は唯一の無裁定価格である

証明. [3] から従う. □

非負連続な $\mathcal{F}_t$-適合過程 $R = \{R_t\}_{t\in[0,T]}$ で

$$E^Q[\sup_{t\in[0,T]} R_t] < \infty$$

を満たしている満期 T のアメリカンデリバティブを考える.

定理 3.4. (アメリカンデリバティブの価格付け)

$$U_0 := \sup_{t\in[0,T]} E^Q[R_t]$$

は, このアメリカンデリバティブの適正価格である. すなわち, U_o は唯一の無裁定価格であり, U_0 より大きいまたは小さい価格では裁定機会が生じる.

証明. [3] から従う. □

3.2 バブルを持つ市場モデル

以下, バブルの例を挙げる.

この節では, あらかじめ確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ 上を考え, その上のブラウン運動を w で記述する. また, 期待値 $E^Q[\cdot]$ は $E[\cdot]$ で記述する.

3.2.1 時間変更モデル

$S_0 = s > 0$ とする. このとき次のような金融価格過程を考える.

$$dS_t = \frac{S_t}{\sqrt{T-t}} dw_t,\ t \in [0,T),\ S_T = 0$$

これはバブルを持つ.

証明.

$$\begin{aligned} X_t &:= \int_0^t \frac{-1}{2(T-s)} ds + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{T-s}} dw_s,\ t \in [0,T),\ X_0 = 0 \\ f(x) &:= s\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

とする. 伊藤の公式から

$$\begin{aligned} f(X_u) &= s + \int_0^t f(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f(X_s) dX_s \cdot dX_s \\ &= s + \int_0^t \frac{f(X_s)}{\sqrt{T-s}} dw_s. \end{aligned}$$

である. よって, 解の一意性から

$$S_t = f(X_t) \tag{9}$$

と書かれる.

一方で, $A_t := -\log(1 - \frac{t}{T}) = \int_0^t \frac{1}{T-s} ds$ とおく.

時間変更ブラウン運動 [4]

$$c(t,\omega) > 0,\ \beta_t := \int_0^t c^2(s,\omega) ds,\ Y_t := \int_0^t c(s,\omega) dw_s$$

で定めるとき, 次を満たすブラウン運動 $\tilde{w}$ が存在する.

$$Y_t = \tilde{w}_{\beta_t},\ t \in [0,T]$$

この事実を, $c(t)=\int_0^t \frac{1}{\sqrt{T-s}}ds$ として用いると,

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{T-s}}dw_s = \tilde{w}_{A_t}$$

と表現できる. よって, 式 (9) から

$$S_t = s\mathrm{e}^{\tilde{w}_{A_t}-\frac{1}{2}A_t}$$

となる. この表現より, $S_t \to 0$ $(t \to T)$ であるので, $[0,T]$ で S が連続であることが分かる.

もし S が真にマルチンゲールであれば,

$$S_0 = E[S_T] = 0$$

となる. これは $S_0 = s > 0$ に反する. 従って, S は Strict 局所マルチンゲールである. よってバブルを持つ. □

3.2.2 CEV モデル (Constant Elasticity of Variance モデル)

$S_0 = s > 0$ とする. このとき次のような金融価格過程を考える.

$$dS_t = S_t^2 dw_t,\ t \in [0,T].$$

これはバブルを持つ.

証明. 伊藤の公式から, $X_t := \frac{1}{S_t}$ とすれば,

$$\begin{aligned} dX_t &= \frac{-1}{S_t^2}dS_t + \frac{1}{2}\frac{2}{S_t^3}dS_t \cdot dS_t \\ &= -dw_t + \frac{1}{X_t}dt \\ &= d\bar{w}_t + \frac{1}{X_t}dt. \text{ (ただし, } \bar{w} := -w \text{ もまたブラウン運動)} \end{aligned}$$

となる.

一方, $\tilde{w}$ を $\tilde{w}_0 = x \in \mathbf{R}^3,\ |x| = \frac{1}{s}$ である 3 次元ブラウン運動をするとき, 伊藤の公式から,

$$\begin{aligned} d(|\tilde{w}_t|) &= \sum_{i=1}^3 \frac{\tilde{w}_t^i}{|\tilde{w}_t|}d\tilde{w}_t^i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^3 (\delta_{ij}\frac{1}{|\tilde{w}_t}| - \frac{\tilde{w}_t^i\tilde{w}_t^j}{|\tilde{w}_t^2|})\delta_{ij}dt \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\tilde{w}_t^i}{|\tilde{w}_t|}d\tilde{w}_t^i + \frac{1}{\tilde{w}_t}dt \end{aligned}$$

である. この時, 定理 2.3 より $d\hat{w}_t := \sum_{i=1}^3 \frac{\tilde{w}_t^i}{|\tilde{w}_t|}dw_t^i$ とおけば, この $\hat{w}$ はブラウン運動となる. よって,

$$d(|\tilde{w}_t|) = d\hat{w}_t + \frac{1}{|\tilde{w}_t|}dt.$$

が成り立つ. 従って, $X_t = |\tilde{w}_t|$ となるので,

$$S_t = \frac{1}{|\tilde{w}_t|}$$

という表現を得る. この表現から,

$$\begin{aligned} E[S_t^2] = E[\frac{1}{|\tilde{w}_t|^2}] &= \int_{\mathbf{R^3}} \frac{1}{|z|^2} \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} \mathrm{e}^{\frac{-|z-x|^2}{2t}} dz \\ &= \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{|\sqrt{t}u + x|^2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \mathrm{e}^{\frac{-|u|^2}{2}} du \end{aligned}$$

である. よって,

$$E[S_t^2] \to 0. \ (t \to \infty)$$

であり, 特に $E[S_t] \to 0. \ (t \to \infty)$ となる. そこで, $E[S_T] < s$ となる $T > 0$ をとる. このとき, もし S がマルチンゲールであるならば, $E[S_t] = S_0 = s$ であるので, これは矛盾である. よって, S は Strict 局所マルチンゲール, すなわちバブルを持つ. □

3.2.3 SV モデル (Stochastics Volatility モデル)

次のモデルを考える.

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t V_t dw_t^S, \\ dV_t &= \eta V_t dw_t^V + \mu V_t dt, \ S_0 = V_0 = s > 0. \end{aligned}$$

(ただし, $\eta, \mu > 0$ とする. また, w^S は Q の下でのブラウン運動であり, $w^\perp$ を Q の下で w^S と独立なブラウン運動とし, $\rho \in (-1, 1)$ に対して, $w^V := \rho w^S + \sqrt{1-\rho^2} w^\perp$ で定めている.) このモデルは SV(Stochastics Volatility) モデルの典型としてよく知られている.

S が真にマルチンゲールと仮定する.
このとき, $dP = \frac{S_T}{S_0} dQ$ で確率測度 P を定義すると, P と Q は同値になる. さらに, 丸山-ギルザノフの定理から, $S_T/S_0 = \exp\{\int_0^t V_s s w_s^S - 1/2 \int_0^t V_s^2 ds\}$ であるので,

$$w_t^{S,P} := w_t^S - \int_0^t V_s ds, \ t \in [0, T]$$

は P の下でブラウン運動である. このとき次が成り立つ.

補題 3.2.

$$w_t^P := \rho w_t^{S,P} + \sqrt{1-\rho^2} w_t^\perp, \ t \in [0, T]$$

で定められた確率過程 $w^P = \{w_t^P\}_{t \in [0,T]}$ は P の下でブラウン運動である.

証明. 確率測度 Q の下, w^S と $w^\perp$ が独立であるので, 伊藤の公式から次が得られる.

$$\begin{aligned} d(w_t^\perp S_t) &= S_t dw_t^\perp + w_t^\perp dS_t + dw_t^\perp \cdot dS_t \\ &= S_t dw_t^\perp + w_t^\perp dS_t \qquad (7) \\ d(((w_t^\perp)^2 - t)S_t) &= S_t d((w_t^\perp)^2 - t) + ((w_t^\perp)^2 - t)dS_t + d((w_t^\perp)^2 - t)\cdot dS_t \\ &= 2S_t w_t^\perp dw_t^\perp + ((w_t^\perp)^2 - t)dS_t \qquad (8) \\ d(w_t^\perp (w_t^{S,P} S_t)) &= w_t^{S,P} S_t dw_t^\perp + w_t^\perp d(w_t^{S,P} S_t) + dw_t^\perp \cdot d(w_t^{S,P} S_t) \\ &= w_t^{S,P} S_t dw_t^\perp + S_t(1 + w_t^{S.P} V_t)dw_t^S \qquad (9) \end{aligned}$$

これより, 確率過程 $\{w_t^\perp S_t\}$, $\{((w_t^\perp)^2 - t)S_t\}$, $\{w_t^\perp(w_t^{S,P} S_t)\}$ は Q の下, それぞれマルチンゲールあることが分かる. 従って, $A \in \mathcal{F}_s$ として,

$$\begin{aligned} E^P[w_t^\perp : A] &= \frac{1}{S_0} E^Q[w_t^\perp S_T : A] \\ &= \frac{1}{S_0} E^Q[w_t^\perp S_t : A] \\ &= \frac{1}{S_0} E^Q[w_s^\perp S_s : A] \ (\because \text{式 (7) より}) \\ &= E^P[w_s^\perp : A] \end{aligned}$$

となる. すなわち, $w^\perp$ は確率測度 P の下でマルチンゲールである. また,

$$\begin{aligned} E^P[(w_t^\perp)^2 - t : A] &= \frac{1}{S_0} E^Q[\{(w_t^\perp)^2 - t\}S_t : A] \\ &= \frac{1}{S_0} E^Q[\{(w_s^\perp)^2 - s\}S_s : A] \ (\because \text{式 (8) より}) \\ &= E^P[(w_s^\perp)^2 - s : A] \end{aligned}$$

となる. すなわち, $w^\perp$ は確率測度 P の下でブラウン運動である. 続いて,

$$\begin{aligned} E^P[w_t^{S,P} w_t^\perp : A] &= \frac{1}{S_0} E^Q[w_t^{S,P} w_t^\perp S_t : A] \\ &= \frac{1}{S_0} E^Q[w_s^{S,P} w_s^\perp S_s : A] \ (\because \text{式 (9) より}) \\ &= E^P[w_s^{S,P} w_s^\perp : A] \end{aligned}$$

となる. 従って, 確率測度 P の下で, $\langle w^\perp, w^{S,P}\rangle_t = 0$ を得る.

以上より, $w^\perp$ は確率測度 P の下で $w^{S,P}$ と独立なブラウン運動である. 従って,

$$\begin{aligned} dw_t^P \cdot dw_t^P &= (\rho dw_t^{S,P} + \sqrt{1-\rho^2} dw_t^\perp)\cdot(\rho dw_t^{S,P} + \sqrt{1-\rho^2} dw_t^\perp) \\ &= dt \end{aligned}$$

となる. よって, w^P は確率測度 P の下でブラウンである. □

これより, V は,

$$dV_t = \eta V_t dw_t^P + (\mu V_t + \eta\rho V_t^2)dt. \tag{10}$$

とも表現できる.

1 次元確率微分方程式の解の爆発判定条件 ([5])

定理 3.5. $I := (l, r),\ -\infty \leq l \leq r \leq \infty,\ \sigma, b \in \mathbf{C}^1$ とするとき,

$$dX_t = \sigma(X_t)dw_t + b(X_t)dt,\ X_0 = x$$

を考える. この確率微分方程式の解を X とし, その分布を P_x とする.
さらに $e \equiv e(X) := \inf\{t > 0 \mid X_t = l \text{ or } X_t = r\}$ で定める. この e を X の爆発時刻という.
$c \in (l, r)$ を固定し,

$$\kappa(x) := 2\int_c^x \mathrm{e}^{-\int_c^y \frac{2b(z)}{\sigma^2(z)}dz}\int_c^y \frac{1}{\sigma^2(z)}\mathrm{e}^{\int_c^z \frac{2b(w)}{\sigma^2(w)}dw}dzdy$$

とする. また,

$$s(x) := \int_c^x \mathrm{e}^{-\int_c^y \frac{2b(z)}{\sigma^2(z)}dz}dy$$

で定める. このとき以下が成り立つ.

$P_x(e < \infty) = 1,\ {}^{\forall}x \in I$ と同値な条件は次のうちいづれかが成り立つこと.

$$\begin{aligned}
&(1)\kappa(r-) < \infty,\ \kappa(l+) < \infty \\
&(2)\kappa(r-) < \infty,\ s(l+) = -\infty \\
&(3)s(r-) = \infty,\ \kappa(l+) < \infty
\end{aligned}$$

κ は s を用いて

$$\kappa(x) = 2\int_c^x s'(y)\int_c^y \frac{1}{\sigma^2(z)}s'(z)^{-1}dzdy$$

と書かれることに注意する.

上の判定条件を, $l = 0, r = \infty,\ \sigma(x) = \eta x,\ b(x) = \mu x + \eta\rho x^2$ として適用する.
$c \in (0, \infty)$ を固定し, $\alpha := \frac{2}{\eta^2}\mu > 1$ と仮定し, $D := \mathrm{e}^{\frac{2}{\eta^2}\mu\log c + \frac{2}{\eta}\rho c} > 0$ とおく. このとき,

$$\begin{aligned}
s'(x) &= Dx^{-\alpha}\mathrm{e}^{-\beta x} \\
\kappa(x) &= 2\frac{1}{\eta^2}\int_c^x y^{-\alpha}\mathrm{e}^{-\beta y}\int_c^y \frac{1}{z^2}z^{\alpha}\mathrm{e}^{\beta z}dzdy
\end{aligned}$$

である.

補題 3.3. 定理 3.5 の判定条件 (2) が成り立つ.

証明. $s(0+)$ について調べる.
$0 < x < c$ に対して, $s(x) = -\int_x^c Dy^{-\alpha}\mathrm{e}^{-\beta y}dy$ であるので,

$$\int_x^c y^{-\alpha}\mathrm{e}^{-\beta y}dy > \mathrm{e}^{-\beta c}\int_x^c y^{-\alpha}dy$$

となる. 従って,

$$s(x) = -D\int_x^c y^{-\alpha}\mathrm{e}^{-\beta y}dy < -D\mathrm{e}^{-\beta c}\int_x^c y^{-\alpha}dy \to -\infty \quad (x \to 0+)$$

となる. よって, $s(0+) = -\infty$ となり, 判定条件 (2) の後半の条件を満たす.
　続いて, $0 < c <^{\forall} x$ に対して, $\kappa(\infty-)$ について調べる.

$$\begin{aligned}\int_0^y \frac{1}{z^2}z^{\alpha}\mathrm{e}^{\beta z}dz &= [\frac{1}{\beta}z^{\alpha-2}\mathrm{e}^{\beta z}]_c^y - \frac{1}{\beta}\int_c^y(\alpha-2)z^{\alpha-3}\mathrm{e}^{\beta z}dzdy \\ &= \frac{1}{\beta}y^{\alpha-2}\mathrm{e}^{\beta y} - \frac{1}{\beta}c^{\alpha-2}\mathrm{e}^{\beta c} - \frac{\alpha-2}{\beta}\int_c^y \mathrm{e}^{\beta z}z^{\alpha-3}dz\end{aligned}$$

となる.
$\alpha \geq 2$ の時：

$$\begin{aligned}\int_0^y \frac{1}{z^2}z^{\alpha}\mathrm{e}^{\beta z}dz &= \frac{1}{\beta}y^{\alpha-2}\mathrm{e}^{\beta y} - \frac{1}{\beta}c^{\alpha-2}\mathrm{e}^{\beta c} - \frac{\alpha-2}{\beta}\int_c^y \mathrm{e}^{\beta z}z^{\alpha-3}dz \\ &\leq \frac{1}{\beta}y^{\alpha-2}\mathrm{e}^{\beta y}\end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned}\kappa(x) &\leq \frac{2}{\eta^2}\int_0^x y^{-\alpha}\mathrm{e}^{-\beta y}\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{\beta y}y^{\alpha-2}dy \\ &= \frac{2}{\eta^2}\frac{1}{\beta}\int_c^x y^{-2}dy \leq \frac{2}{\eta^2}\frac{1}{\beta}\int_c^{\infty}\frac{1}{y^2}dy < \infty.\end{aligned}$$

を得る. よって, $\kappa(\infty-) < \infty$ である.
$1 < \alpha < 2$ の時：

$$\begin{aligned}\int_0^y \frac{1}{z^2}z^{\alpha}\mathrm{e}^{\beta z}dz &= \frac{1}{\beta}y^{\alpha-2}\mathrm{e}^{\beta y} - \frac{1}{\beta}c^{\alpha-2}\mathrm{e}^{\beta c} + \frac{2-\alpha}{\beta}\int_c^y \mathrm{e}^{\beta z}z^{\alpha-3}dz \\ &\leq \frac{1}{\beta}y^{\alpha-2}\mathrm{e}^{\beta y} + \frac{2-\alpha}{\beta}\mathrm{e}^{\beta y}\int_c^y z^{\alpha-3}dz \\ &= \frac{1}{\beta}y^{\alpha-2}\mathrm{e}^{\beta y} + \frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{\beta y}(c^{\alpha-2} - y^{\alpha-2}) \\ &= \frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{\beta y}c^{\alpha-2}\end{aligned}$$

である. 従って,

$$
\begin{aligned}
\kappa(x) &\le \frac{2}{\eta^2}\int_0^x y^{-\alpha}\mathrm{e}^{-\beta y}\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{\beta y}c^{\alpha-2}dy \\
&= \frac{2}{\eta^2}\frac{1}{\beta}c^{\alpha-2}\int_c^x y^{-\alpha}dy \le \frac{2}{\eta^2}\frac{1}{\beta}\int_c^\infty \frac{1}{y^\alpha}dy < \infty.
\end{aligned}
$$

を得る. よって, $\kappa(\infty-) < \infty$ である.

従って, 判定条件 (2) が成り立つことが分かる. □

この補題 3.3, 式 (10) の解 V は確率測度 P の下で爆発する.
一方で Q の下で, V は $dV_t = \eta V_t dw_t^V + \mu V_t dt$. であったので, これは爆発しない. しかし, P と Q の同値性からこれは矛盾である. よって, 仮定「S がマルチンゲールである」は偽となる. 従って S は Strict 局所マルチンゲール, すなわちバブルを持つ.

3.2.4 SV モデル (2)

確率過程 $X = \{X\}_{t\in[0,T]}$ に対して,

$$
f_t(X) := \int_0^\infty \lambda\mathrm{e}^{-\lambda r}\log(X_t/X_{t-r})dr,\ (X_{t-r} := X_{t-r\vee 0})
$$

とおく. ただし, $\lambda > 0$ とする.
さらに, 関数 η に対して,

$$
V_t(X) := \eta(f_t(X))
$$

で定める.

このとき, 次のモデルを考える.

$$
dS_t = S_t V_t(S)dw_t,\ S_0 = s > 0.
$$

$f_t(S)$ は,

$$
f_t(S) = \log S_t - \int_0^\infty \lambda\mathrm{e}^{-\lambda r}\log S_r dr
$$

である. よって, この $f_t(S)$ は, 現在の金融価格と直近の過去の金融価格 (の対数をとったもの) の平均値の差であると解釈できる.

補題 3.4. ([6])Lemmma3.1

$$
\begin{aligned}
Z_t &:= \log S_t,\ (Z_t = 0, t < 0) \\
Y_t &:= f_t(S) = \int_0^\infty \lambda\mathrm{e}^{-\lambda r}(Z_t - Z_{t-r})dr
\end{aligned}
$$

で定めると,

$$dY_t = dZ_t - \lambda Y_t dt$$

が成り立つ.

証明. $t \in [0,T]$ を固定する.
$f(t,x) := \mathrm{e}^{\lambda t}x$　として伊藤の公式を適用すれば,

$$\begin{aligned} d(\mathrm{e}^{\lambda t}Y_t) &= \mathrm{e}^{\lambda t}dY_t + \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}Y_t dt + \frac{1}{2}dY_t \cdot dY_t \\ &= \mathrm{e}^{\lambda t}dY_t + \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}Y_t dt \end{aligned} \tag{11}$$

となる.
　一方で,

$$\mathrm{e}^{\lambda t}Y_t = \int_0^\infty \lambda \mathrm{e}^{\lambda(t-r)}dr = Z_t \int_{-\infty}^t \lambda \mathrm{e}^{\lambda l}dl - \int_{-\infty}^t \lambda \mathrm{e}^{\lambda l}Z_l dl$$

である. そこで, $H(t) := \int_{-\infty}^t \lambda \mathrm{e}^{\lambda l}dl,\ F(t) := \int_{-\infty}^t \lambda \mathrm{e}^{\lambda l}Z_l d$ で定めて, $g(t,x) := xH(t) - F(t)$ として伊藤の公式を用いると,

$$\begin{aligned} d(\mathrm{e}^{\lambda t}Y_t) &= H(t)dZ_t + (Z_t H'(t) - F'(t))dt \\ &= H(t)dZ_t \end{aligned} \tag{12}$$

となる.
　従って, 式 (11), 式 (12) から,

$$H(t)dZ_t = \mathrm{e}^{\lambda t}dY_t + \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}Y_t dt$$

を得る. これを整理すれば,

$$\begin{aligned} dY_t &= \mathrm{e}^{-\lambda t}H(t)dZ_t - \lambda Y_t dt \\ &= dZ_t - \lambda Y_t dt \end{aligned}$$

となる. □

　この補題 3.4 より

$$\begin{aligned} dY_t &= d(\log S_t) - \lambda Y_t dt \\ &= \frac{1}{S_t}dS_t - \frac{1}{2S_t^2}dS_t \cdot dS_t - \lambda Y_t dt \\ &= V_t dw_t - \frac{1}{2}V_t^2 dt - \lambda Y_t dt \\ &= \eta(Y_t)dw_t - \left(\lambda Y_t + \frac{1}{2}\eta^2(Y_t)\right)dt \end{aligned} \tag{13}$$

という表現を得る.

そこで, 前の章節と同様に S がマルチンゲールであると仮定すれば, $dP = \frac{S_T}{S_0} dQ$ で, Q と同値な確率測度 P を定義できる. よって丸山-ギルザノフの定理から,

$$dw^P := dw_t - V_t dt,\ t \in [0,T]$$

で定められる確率過程 $w^P = \{w_t^P\}_{t\in[0,T]}$ は P の下でブラウン運動となる. これより,

$$dY_t = \eta(Y_t) dw_t^P - \left(\lambda Y_t - \frac{1}{2}\eta^2(Y_t)\right) dt \tag{14}$$

とも表現される.

以後, $\eta^2(x) := 1 + x^2$ と仮定する.

補題 3.5. 定理 3.5 で定義した記号を用いる.
$a, b \in I,\ a < x < b,\ \tau := \inf\{t > 0 \mid X_t \notin [a,b]\}$ とすれば, 次が成り立つ.

$$P_x(X_\tau = a) = \frac{s(b) - s(x)}{s(b) - s(a)},\ P_x(X_\tau = b) = \frac{s(x) - s(a)}{s(b) - s(a)}$$

証明. 伊藤の公式から,

$$\begin{aligned} s(X_{t\wedge\tau}) &= s(x) + \int_0^{t\wedge\tau} s'(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau} s''(X_s) dX_s dX_s \\ &= s(x) + \int_0^{t\wedge\tau} s'(X_s)\sigma(X_s) dw_t \end{aligned}$$

となる. これより確率過程 $\{s(X_{t\wedge\tau})\}_t$ はマルチンゲールであるから

$$s(x) = E[s(X_{t\wedge\tau})]$$

となる. よって,

$$\begin{aligned} s(x) &= E[\lim_{t\to\infty} s(X_{t\wedge\tau})] = E[s(X_\tau)] \\ &= P_x(X_\tau = a)s(a) + P_x(X_\tau = b)s(b) \end{aligned}$$

である.

また, $P_x(X_\tau = a) + P_x(X_\tau = b) = 1$ であるのでこれらを解いて得る. □

補題 3.5 を式 (13) に適用する. $\sigma^2(x) = 1 + x^2,\ b(x) = -\{\lambda x + \frac{1}{2}(1 + x^2)\}$ であるので, $D := \mathrm{e}^{-\lambda \log(1+c^2) - c}$ とすれば,

$$s(x) = \int_c^x D(1 + y^2)^\lambda \mathrm{e}^y dy$$

で表現される.

従って, $c < x$ に対して,

$$s(x) \geq D \int_c^x \mathrm{e}^y dy = D(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^c) \to \infty. (x \to \infty)$$

となる.

続いて, $x < c$ に対しては,

$$s(x) = -\int_x^c D(1+y^2)^\lambda \mathrm{e}^y dy$$

であるので,

$$s(x) \leq -D\int_x^c \mathrm{e}^y dy = -D(\mathrm{e}^c - \mathrm{e}^x) \to -D\mathrm{e}^c < \infty.(x \to -\infty)$$

となる. よって, $\tau := \inf\{t > 0 \mid Y_t \notin [-\infty, \infty]\}$ とすれば, 補題 3.5 から,

$$Q(Y_\tau = -\infty) = 1 \tag{15}$$

を得る.

同様に, 補題 3.5 を確率微分方程式 (14) に適用する. $b(x) = -\{\lambda x - \frac{1}{2}(1+x^2)\}$ であるので,

$$P(Y_\tau = \infty) = 1 \tag{16}$$

を得る.

しかし, 式 (15) と式 (16) は, P と Q の同値性に反する. よって S は Strict 局所マルチンゲール, すなわちバブルを持つ.

3.2.5 ブラック・ショールズモデルから作られるバブル

続いて次のようなモデルを考える

.

$$dS_t = S_t dw_t,\ S_0 = s > 0$$

このとき, $v(x,r) := \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!} h^{(n)}(r),\ h(r) := \mathrm{e}^{-1/r}$ で定める.(ただし, $h^{(n)}$ は h の n 回微分を表すものとする.)

補題 3.6.

$$v_{xx} = v_r$$

が成り立つ.
(証明は後にする.)

このとき,

$$\begin{aligned} \triangle(x,t) :&= x^{1/2}\mathrm{e}^{-(T-t)/8} v(\log x, (T-t)/2) \\ Y_t :&= \triangle(S_t, t) \end{aligned} \tag{17}$$

で定めれば, 伊藤の公式から,

$$dY_t = \triangle_x(S_t, t)dS_t$$

を得る.

ゆえに, このように定めた確率過程 Y を金融価格過程と思えば, Y は Q の下で局所マルチンゲールで $Y_T = 0,\ Y_0 > 0$ であるので, Y はバブルを持つ金融価格過程となる. すなわち, ブラック・ショールズモデルからバブルを持つ金融価格過程をつくることができることが分かる.

補題 *3.6* の証明. もし微分と無限和の順序変更が可能であれば,

$$v_{xx} = \sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} h^{(n)}(r), \quad v_r = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!} h^{(n+1)}(r) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} h^{(n)}(r)$$

から分かる.

従って以下, その順序変更の保証を示す.

h は n 回微分可能であり, $P_n(y)$ を次を満たすような多項式とする.

$$h^{(n)}(r) = P_n(1/r)\mathrm{e}^{-1/r}$$

このとき,

$$h^{(n+1)}(r) = P_n'(1/r)\frac{-1}{r^2}\mathrm{e}^{-1/r} + P_n(1/r)\frac{1}{r^2}\mathrm{e}^{-1/r}$$

である. 従って, P_n は次の漸化式を満たす.

$$P_{n+1}(y) = P_n'(y)(-y^2) + P_n(y)y^2 \tag{18}$$

また, a_k^n を P_n の y^{2n-k} の項の係数とすれば,

$$P_n(y) = y^{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k^n y^{2n-k} \tag{19}$$

とおける. 従って, 式 (18) から,

$$
\begin{aligned}
P_{n+1}(y) &= y^2(P_n(y) - P_n'(y)) \\
&= y^{2(n+1)} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k^n y^{2(n+1)-k} - 2ny^{2n+1} - \sum_{l=1}^{n-1} a_l^n (2n-l) y^{2n-l+1} \\
&= y^{2(n+1)} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k^n y^{2(n+1)-k} - 2ny^{2(n+1)-1} - \sum_{l=1}^{n-1} a_l^n (2n-l) y^{2(n+1)-(l+1)} \\
&= y^{2(n+1)} + \{a_1^n y^{2(n+1)-1} - 2ny^{2(n+1)-1}\} \\
&\quad + \{\sum_{k=2}^{n-1} a_k^n y^{2(n+1)-k} - \sum_{k=2}^{n-1} a_{k-1}^n (2n-k+1) y^{2(n+1)-k}\} - a_{n-1}^n (n+1) y^{(n+1)+1} \\
&= y^{2(n+1)} + (a_1^n - 2n) y^{2(n+1)-1} \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n-1} \{a_k^n - a_{k-1}^n (2n-k+1)\} y^{2(n+1)-k} - a_{n-1}^n (n+1) y^{(n+1)+1}
\end{aligned}
$$

となる. これより,

$$a_1^{n+1} = a_1^n - 2n \tag{20}$$

$$a_k^{n+1} = a_k^n - (2n-k+1)a_{k-1}^n,\ 2 \leq k \leq n-1 \tag{21}$$

$$a_n^{n+1} = -(n+1)a_{n-1}^n \tag{22}$$

を得る. よって, 式 (20), 式 (22) から,

$$a_1^n = -n(1-n) \tag{23}$$

$$a_{n-1}^n = (-1)^{n-2} n(n-1)\cdots 3a_1^2 = (-1)^{n-1} n! \tag{24}$$

となる.
式 (21) を用いれば, 式 (23) から

$$
\begin{aligned}
a_2^n - a_2^{n-1} &= -(2n-3)a_1^{n-1} = (2n-3)(n-1)(2-n) \\
a_2^n &= a_2^3 + \sum_{l=3}^{n} (2k-3)(k-1)(2-k) \\
&= O(n^4)
\end{aligned}
$$

である. よってこれを繰り返せば, $2 \leq k \leq n-2$ 毎に

$$
\begin{aligned}
a_k^n &= a_k^{k+1} + \sum_{l=1}^{n} (2n-1-k) a_{k-1}^l \\
&= O(n^{2k})
\end{aligned}
$$

を得る.

また, 式 (21) を用いれば, 式 (24) から

$$\begin{aligned} a^n_{n-2} + (n+1)a^{n-1}_{n-3} = a^{n-1}_{n-2} &= (-1)^{n-2}(n-1)! \\ a^{n-1}_{n-3} + na^{n-2}_{n-4} = a^{n-2}_{n-3} &= (-1)^{n-3}(n-2)! \\ &\vdots \\ a^4_2 + 5a^3_1 = a^3_2 &= (-1)^2 3! \end{aligned}$$

であるので,

$$a^n_{n-2} = (-1)^{n-2}\sum_{l=1}^{n-3}\frac{(n+1)!}{(n+2-l)!}(n-l)! + (-1)^{n-3}(n+1)n\cdots 5a^3_1$$

となる．よって,

$$|a^n_{n-2}| = O((n+1)!)$$

となる．
従って, これを繰り返せば, $2 \le k \le n-2$ 毎に

$$|a^n_k| = O((2n-k-1)!)$$

を得る．
　ゆえに,

$$\begin{aligned} |a^n_k| &\le O(n^n),\ (2 \le k \le n/2) \\ |a^n_k| &\le O((3n/2)!),\ (n/2-1 \le k \le n-2) \end{aligned}$$

であるから,

$$P_n = O((3n/2)!)$$

となる．ここで, スターリングの近似公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

を用いれば,

$$\begin{aligned} |C_n| &= |\frac{h^n(r)}{(2n)!}| \\ &\le O\left(\frac{\sqrt{3\pi n}\left(\frac{3n}{2\mathrm{e}}\right)^{3n/2}}{\sqrt{4\pi n}(\frac{2n}{\mathrm{e}})^{2n}}\right) \\ &= O\left(\left(\frac{\mathrm{e}^2}{2\mathrm{e}^{3/2}}\right)^n\left(\frac{(3n)^{3/2}}{4n^2}\right)^n\right) \end{aligned}$$

となる．これより, 級数の収束半径を計算すれば,

$$
\begin{aligned}
\sqrt[n]{|C_n|} &\leq O\left(\frac{(3n)^{3/2}}{4n^2}\right) \\
&= O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \to 0,\ (n \to \infty)
\end{aligned}
$$

となり, 収束半径は

$$
\begin{aligned}
R &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}} \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

である. 従って, 微分と無限和の順序変更が保証される.

□

4　バブルとプット・コールパリティ

本節と次節ではバブルで起きる現象を紹介する. 特に本節ではプット・コールパリティに注目する.

4.1　バブルでのプット・コールパリティ

$\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$ とし, 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, Q, \{\mathcal{F}_t\})$ 上の既に割り引かれた Q-局所マルチンゲールな非負連続金融価格過程を S とする.

ペイオフが $H = H(S_T)$ のヨーロピアンデリバティブの時刻 t における無裁定価格 $V_t(H)$ は次のようであった.

$$V_t(H) = E_t[H(S_T)] := E[H(S_T)|\mathcal{F}_t]$$

特に, $K \geq 0$ に対して, コールとプットオプションの無裁定価格を

$$C_t(K) := V_t((S_T - K)^+)$$
$$P_t(K) := V_t((S_T - K)^-)$$

と記す.

定理 4.1. S がバブルならば次が成り立つ.

$$E_t[S_T] < S_t \tag{25}$$

また, 式 (25) は次とそれぞれ同値.

$$C_t(K) - P_t(K) < S_t - K, \tag{26}$$
$$\lim_{K\to\infty} (P_t(K) - K + S_t) > 0. \tag{27}$$

証明. S が局所マルチンゲールであり, また非負性から S は優マルチンゲールであるので

$$E_t[S_T] \leq S_t \tag{28}$$

である. 従って S がバブルを持つならば, S は Strict 局所マルチンゲールなので, 式 (28) から

$$E_t[S_T] < S_t$$

を得る.

続いて,(25) と (26),(27) の同値性を示す.

$$C_t(K) - P_t(K) = E_t[S_T] - K \tag{29}$$

であることに注意すれば, 直ちに (25) と (26) の同値性が分かる.
また, 式 (29) から,

$$P_t(K) - K + S_t = C_t(K) - E_t[S_T] + S_t$$

となる. よって,(25) と (27) の同値性は,

$$\lim_{K\to\infty} C_t(K) = 0$$

であることから分かる. □

以下, 第 3 章で挙げたバブルでプット・コールパリティが成り立たないことを観察する.

4.1.1 時間変更モデル

時間変更モデルのバブルを考える.
この時, S はバブルであり, $S_T = 0$ であったので,

$$C_t(K) = 0,\ P_t(K) = K$$

となる. 従って,

$$C_t(K) - P_t(K) < S_t - K$$

となり, プット・コールパリティが壊れていることが分かる.

4.1.2 CEV モデル

CEV モデルのバブルを考える.
この時, S はバブルであり, 初期値が $\tilde{w}_0 = x \in \mathbf{R}^3,\ |x| = \frac{1}{s}$ である 3 次元ブラウン運動を $\tilde{w}$ で

$$S_t = \frac{1}{|\tilde{w}_t|}$$

と表現できた.

補題 4.1. S の密度関数は, 次のように表現される.

$$Q(S_T \in dz) = \frac{s}{z^3}\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}(\mathrm{e}^{\frac{-1}{2T}(1/z-1/s)^2} - \mathrm{e}^{\frac{-1}{2T}(1/z+1/s)^2})$$

証明.

ベッセル過程の密度関数 [3]

確率微分方程式

$$dR_t = dw_t + \frac{\delta - 1}{2R_t}dt,\ R_0 = s$$

の解 $R = \{R_t\}$ は δ 次ベッセル過程と呼ばれ, その R_t の密度関数 $p^{\nu}_{BES}(t,s,y)$ は,

$$p^{\nu}_{BES}(t,s,y) = \frac{1}{t}\frac{y^{\nu+1}}{s^{\nu}}\mathrm{e}^{\frac{-1}{2t}(s^2+y^2)} I_{\nu}\left(\frac{sy}{t}\right) 1_{y\geq 0}$$

となる.
ただし, Γ をガンマ関数とし,

$$\begin{aligned} I_{\nu}(z) &:= \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \sum_{n\geq 0} \frac{(z/2)^{2n}}{n!\Gamma(\nu+n+1)} \\ \nu &:= \delta/2 - 1 \end{aligned}$$

で定める.

ベッセルの密度関数の公式を $\delta = 3$ で適用する. すると,

$$\begin{aligned} \Gamma(\nu+n+1) &= \Gamma(n+3/2) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3\cdot \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

となり,

$$\begin{aligned} I_{1/2}(z) &= \left(\frac{z}{2}\right)^{1/2} \sum_{n\geq 0} \frac{(z/2)^{2n}}{n!\Gamma(n+3/2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^{1/2} z^{-1}\left(2\sum_{n\geq 0}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^{-1/2}(\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}) \end{aligned}$$

を得る. 従って,

$$p^{1/2}_{BES}(t,s,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\frac{y}{s}\left(\mathrm{e}^{\frac{-1}{2t}(s-y)^2} - \mathrm{e}^{\frac{-1}{2t}(s+y)^2}\right)$$

となる.
これより, $S_T = \dfrac{1}{|\tilde{w}_T|}$ の密度関数 p_{CEV} は, $|\tilde{w}|$ が 3 次のベッセル過程であるから,

$$\begin{aligned} p_{CEV}\left(T, \frac{1}{s}, z\right) &= p^{1/2}_{BES}\left(T, \frac{1}{s}, \frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2} \\ &= \frac{s}{z^3}\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\left(\mathrm{e}^{\frac{-1}{2T}(1/z-1/s)^2} - \mathrm{e}^{\frac{-1}{2T}(1/z+1/s)^2}\right) \end{aligned}$$

となる. □

この補題 4.1 とマルコフ性から,

$$
\begin{aligned}
C_t(K) - P_t(K) &= E_t[S_T - K] \\
&= \int_0^\infty z \frac{s}{z^3} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \left(\mathrm{e}^{\frac{-1}{2(T-t)}(1/z-1/s)^2} - \mathrm{e}^{\frac{-1}{2(T-t)}(1/z+1/s)^2} \right) dz \;_{|s=S_t} - K \\
&= \left(2\Phi(\theta(S_t)) - 1\right) S_t - K \\
&< S_t - K
\end{aligned}
$$

を得る. 従って, このモデルでもプット・コールパリティは成り立っていない.
(ただし, $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布関数で, $\theta(s) := \frac{-1}{s\sqrt{T-t}}$ で定めている.)

5 バブルと最低保証付きヨーロピアンオプション

時刻 T で満期のペイオフが $H = H(S_T)$ のオプションを優複製するエージェントを考える.

一般にヨーロピアンオプションは, 満期 T でのみの支払いである. よってエージェントは, 優複製;

$$W_T^{(x,\xi)} \geq H(S_T)$$

となるポートフォリオ $(x, \xi) \in \mathbf{R} \times \underline{\mathcal{A}}_T$ を選択する.

しかし, 現実では満期のみの支払いだけでなく, それ以前の時刻で支払いを要求されることがしばしばある. それは例えば, もし満期以前に該当の会社が売買された場合などである. このとき, 満期以前の時刻 t に $G(S_t)$ を支払う義務を負うことがある. 従って, エージェントは時刻 t で $G(S_t)$ をも優複製することが求められる. この G を S の最低保証という.

以下, G を非負凸関数で, $H \geq G$ であるものとする.

もし S がマルチンゲールであれば, 元のデリバティブ $H(S_T)$ を優複製するポートフォリオ $(x, \xi) \in \mathbf{R} \times \underline{\mathcal{A}}_T$ によって,

$$\begin{aligned} W_t^{(x,\xi)} &\geq E_t^Q[W_T^{(x,\xi)}] \ (\because 3.1 \text{ より } W \text{ の優マルチンゲール性}) \\ &\geq E_t^Q[H(S_T)] \ (\because W_T^{(x,\xi)} \geq H(S_T)) \\ &\geq E_t^Q[G(S_T)] \\ &\geq G(E_t^Q[S_T]) \ (\because G \text{ の凸性より } Jensen \text{ の不等式}) \\ &= G(S_t) \ (\because S \text{ のマルチンゲール性}) \end{aligned} \tag{30}$$

となる. 従って, S がマルチンゲールであれば, 例え満期以前の時刻 $t \in [0, T]$ で支払い $G(S_t)$ を負う義務にあったとしても, 元の H を優複製するポートフォリオで $G(S_t)$ も優複製していることがわかる. しかし, S がバブルである時は, 一般に式 (30) が成り立つか分からない.

ここで, 最低保証付きヨーロピアンデリバティブの優複製の概念を導入する.

定義 5.1. ペイオフが H で最低保証が G のオプションの時刻 t での公正価格 $V_t(H, G)$ を,

$$V_t(H,G) := \min\{x \in \mathbf{R} |\ \text{ある} \xi \in \underline{\mathcal{A}}_T \text{で}, W_T^{(x,\xi)} \geq H(S_T), W_u^{(x,\xi)} \geq G(S_u)\, u \in [t, T)\}$$

で定める.

すると, $R = \{R_t\}_{t \in [0,T]}$ を

$$R_t = J(S_t, t) := H(S_t) 1_{t=T} + G(S_t) 1_{t<T}$$

で定めれば, $V_t(H,G)$ はペイオフが $R=\{R_t\}_{t\in[0,T]}$ の過程であるアメリカンオプションの時刻 t における適正価格と一致している. すなわち,

$$V_t(H,G)=\sup_{u\in[t,T]}E_t[J(S_u,u)]$$

で表現される.

このとき次が成り立つ.

定理 5.1. G を $\beta:=\limsup_{x\to\infty}\dfrac{G(x)}{x}>0$ である正の凸関数とする.

このとき, $H\geq G$ であれば,

$$V_t(H,G)=E_t[H(S_T)]+\beta(S_t-E_t[S_T])$$

となる.

この定理 5.1 は, Q の下で局所マルチンゲールである一般の S であれば成り立ち, S がバブルを持たないとき, すなわち S がマルチンゲールであるときは,

$$V_t(H,G)=E_t[H(S_T)]$$

となることから, この章節の冒頭での議論も包含する.

定理 *5.1* の証明. 記号簡略化のために $T=1$ として示す.(T のときも同様)

任意の $x>0,t\in(0,1)$ に対して,

$$\begin{aligned}H_x &:= \inf\{u>0|S_u\geq x\}\wedge 1\\ H_x\circ\theta_t &:= \inf\{u>t|S_u\geq x\}\wedge 1\end{aligned}$$

で定める. このとき, 確率過程

$$S(H_x\circ\theta_t)=\{S_{u\wedge H_x\circ\theta_t}\}_{u\in[0,1]}$$

は有界な局所マルチンゲールであるので, マルチンゲールとなる. よって, $t<1$ に対して,

$$\begin{aligned}S_t&=E_t[S_{H_x\circ\theta_t}]\\&=E_t[S_t1_{H_x\circ\theta_t=t}]+E_t[x1_{t<H_x\circ\theta_t<1}]+E_t[S_11_{H_x\circ\theta_t=1}]\\&=S_tE_t[1_{S_t>x}]+xQ_t(\{t<H_x\circ\theta_t<1\})+E_t[S_11_{H_x\circ\theta_t=1}]\end{aligned}$$

であるから,

$$S_t-E_t[S_11_{H_x\circ\theta_t=1}]=S_tE_t[1_{S_t>x}]+xQ_t(\{t<H_x\circ\theta_t<1\})$$

となる. 従って,

$$\begin{aligned}\gamma_t&:=S_t-E_t[S_1]\\&=\lim_{x\to\infty}(S_t-E_t[S_11_{H_x\circ\theta_t=1}])\\&=\lim_{x\to\infty}(S_tE_t[1_{S_t>x}]+xQ_t(\{t<H_x\circ\theta_t<1\}))\\&=\lim_{x\to\infty}xQ_t(\{t<H_x\circ\theta_t<1\})\\&=\lim_{x\to\infty}xQ_t(\{\sup_{u\in[t,1)}S_u\geq x\})\end{aligned}\tag{31}$$

である.

一方, G の条件から, 任意の $\epsilon > 0$ を固定すると,

$$\frac{G(x_n)}{x_n} > \beta - \epsilon, \ ^{\forall} n \in \mathbf{N}$$
$$x_n \nearrow \infty.(n \to \infty)$$

となる正の数列 $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ が存在する. これを用いて,

$$H_n := H_{x_n} \circ \theta_t$$

で定める. このとき, $S_t < x_n$ を満たす充分大きな n に対して,

$$\begin{aligned}
\sup_{u \in [t,1]} E_t[J(S_u, u)] &\geq E_t[J(S_{H_n}, H_n)] \\
&= E_t[H(S_1) 1_{H_n = 1}] + E_t[G(S_{H_n}) 1_{H_n < 1}] \\
&= E_t[H(S_1) 1_{H_n = 1}] + \frac{G(x_n)}{x_n} x_n Q_t(\{H_n < 1\}) \\
&\geq E_t[H(S_1) 1_{H_n = 1}] + (\beta - \epsilon) x_n Q_t(\{\sup_{u \in [t,1]} S_u \geq x_n\}) \\
&\geq E_t[H(S_1) 1_{H_n = 1}] + \beta x_n Q_t(\{\sup_{u \in [t,1]} S_u \geq x_n\})
\end{aligned}$$

となる. よって, 式 (31) から,

$$\begin{aligned}
\sup_{u \in [t,1]} E_t[J(S_u, u)] &\geq \lim_{n \to \infty} E_t[H(S_1) 1_{H_n = 1}] + \beta \lim_{n \to \infty} x_n Q_t(\{\sup_{u \in [t,1]} S_u \geq x_n\}) \\
&= E_t[H(S_1)] + \beta \gamma_t
\end{aligned} \tag{32}$$

を得る.

続いて, 逆の不等式を示す.

$$Y_u^H := E_u[H(S_1)], \ Y_u^G := E_u[G(S_1)], \ u \in [t, 1]$$

で定める.

$t \leq u < 1$ のとき,

$$G^{\beta}(x) := \beta x - G(x)$$

すれば, 関数 G^{β} は単調増加凹関数で次を満たす.

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{G^{\beta}(x)}{x} = 0.$$

従って,

$$\begin{aligned}
E_u[\beta S_1 - G(S_1)] &= E_u[G^{\beta}(S_1)] \\
&\leq G(E_u[S_1]) \ (\because Jensen \text{ の不等式}) \\
&\leq G^{\beta}(S_u) \ (\because S \text{ の優マルチンゲール性}) \\
&= \beta S_u - G(S_u)
\end{aligned}$$

である. ゆえに,

$$\beta E_t[S_1] - Y_u^G \leq \beta S_u - G(S_u)$$

となり,

$$G(S_u) \leq \beta\gamma_u + Y_u^G,\ u \in [t,1)$$

が成り立つ. よって, $t \leq u < 1$ で

$$\begin{aligned} J(S_u,u) &= G(S_u)1_{u<1} + H(S_u)1_{u=1} \\ &= G(S_u)\ (\because t \leq u < 1) \\ &\leq \beta\gamma_u + Y_u^G \\ &\leq \beta\gamma_u + Y_u^H\ (\because H \geq G) \end{aligned}$$

となる. すなわち,

$$J(S_u,u) \leq \beta\gamma_u + Y_u^H,\ u \in [t,1) \tag{33}$$

が成り立つ.
式 (33) は, $u=1$ でも明らかに成り立つので, 式 (33) は $u \in [t,1]$ で成り立つことがわかる.
　よって,

$$\begin{aligned} E_t[J(S_u,u)] &\leq E_t[\beta\gamma_u + Y_u^H] \\ &= \beta(E_t[S_u] - E_t[S_1]) + E_t[E_u[H(S_1)]] \\ &\leq \beta\gamma_t + E_t[H(S_1)]\ (\because S \text{ の優マルチンゲール性}) \end{aligned}$$

となる.
　従って

$$\sup_{u\in[t,1]} E_t[J(S_u,u)] \leq \beta\gamma_t + E_t[H(S_1)] \tag{34}$$

であり, 式 (32) と式 (34) から定理は成り立つ. □

系 5.1. 任意の $K \geq 0,\ \alpha \in (0,1]$ に対して,

$$\begin{aligned} G^\alpha(x) &:= \alpha(x-K)^+ \\ H(x) &:= (x-K)^+ \end{aligned}$$

で定める. このとき, ペイオフが H で最低保証 G^α 付きコールオプションの時刻 t での公正価格 $V_t(H,G^\alpha)$ は,

$$V_t(H,G^\alpha) = (1-\alpha)C_t^E(K) + \alpha C_t^A(K)$$

である.
(ただし, C^E はヨーロピアンコールオプション価格, C^A はアメリカンコールオプション価格である.)

証明. まず, 定理 5.1 を, $H(x) = G(x) = (x - k)^+$ として適用すれば,

$$C_t^A(K) = C_t^E(K) + (S_t - E_t[S_T])$$

である. よって,

$$C_t^E(K) + \alpha(S_t - E_t[S_T]) = (1-\alpha)C_t^E(K) + \alpha C_t^A(K)$$

を得る.

再び定理 5.1 で, H, G^α で適用すれば,

$$\begin{aligned} V_t(H, G^\alpha) &= E_t[(S_T - K)^+] + \alpha(S_t - E_t[S_T]) \\ &= C_t^E(K) + \alpha(S_t - E_t[S_T]) \\ &= (1-\alpha)C_t^E(K) + \alpha C_t^A(K) \end{aligned}$$

となる. □

参考文献

[1] A.M.G.Cox, D.G.Hobson. : Local martingales bubbles and option prices. Finance Stochast $9, 477-492$(2005)

[2] 舟木直久：確率微分方程式. 岩波書房 (2006)

[3] 関根順：数理ファイナンス. 培風館 (2007)

[4] B. エクセンダール：確率微分方程式 (谷口説男訳). 丸善出版 (2012)

[5] S.Watanabe, N.Ikeda : Stochastics Differential Equations and Diffusion Processes. North Holland (1989)

[6] D.G.Hobson, L.C.G.Rogers : Complete models with stochastics volatility. Math. Finance $8, 27-48$(1998)

[7] Heston.S, Loewenstein.M, Willard.G.A. : Options and Bubbles. The review of financial studies $20, 359-390$(2007)