確率論の数理ファイナンス・保険数理への応用

斎藤　新悟

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

本稿では確率論の数理ファイナンスおよび保険数理への応用例を取り扱う．第 1 節では，**二項モデル** (binomial model) または **CRR モデル** (CRR model, Cox-Ross-Rubinstein model) と呼ばれる，金融派生商品の価格付けの離散的なモデルについて述べる．第 2 節では，生命保険数理において生存・死亡などの状況を Markov 過程を用いて記述する方法について概観する．どちらについてもごく基本的な事項にとどめているので，より詳しくは末尾の参考文献などを参照.

1　二項モデルにおける金融派生商品の価格付け

1.1　設定

一定の利率 $r > 0$ を持つ安全資産と，時刻 $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$ での価格が S_t であるような株が存在する市場を考え，S_t は次のように変化すると仮定する：時刻 0 における株価 S_0 は定数 $s_0 > 0$ であり，時刻が 1 だけ経過するごとに株価は上昇して u 倍になるか下降して d 倍になるかのいずれかがそれぞれ確率 p, $1-p$ で独立に起こる ($0 < d < 1 + r < u$, $0 < p < 1$).

$$
\begin{tikzcd}
 & & S_2 = s_0u^2 & \\
 & S_1 = s_0u \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "1-p"'] & & \\
S_0 = s_0 \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "1-p"'] & & S_2 = s_0ud & \cdots \\
 & S_1 = s_0d \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "1-p"'] & & \\
 & & S_2 = s_0d^2 &
\end{tikzcd}
$$

確率空間の言葉を用いると，次で与えられる確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ が背後にあると考えられる：$\Omega = \{\pm 1\}^T = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_T) \mid \omega_1, \ldots, \omega_T = \pm 1\}$ で，$\mathcal{F}$ は Ω のべき集合であり，確率測度 P は各 $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_T) \in \Omega$ に対して

$$P(\{\omega\}) = p^{\#\{i=1,\ldots,T \mid \omega_i = 1\}}(1-p)^{\#\{i=1,\ldots,T \mid \omega_i = -1\}}$$

を満たすようなものである．$t = 0, \ldots, T$ に対して，$\mathcal{F}$ の部分 σ 加法族 $\mathcal{F}_t$ を

$$\mathcal{F}_t = \Big\{ \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_T) \in \Omega \mid (\omega_1, \ldots, \omega_t) \in A\} \;\Big|\; A \subset \{\pm 1\}^t \Big\}$$

で定義する．特に $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ である．$\mathcal{F}_t$ は時刻 t までの情報を表し，確率変数が $\mathcal{F}_t$ 可測であることは各 $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_T) \in \Omega$ での値が $\varphi(\omega_1, \ldots, \omega_t)$ と書けることと同値である．

1.2 金融派生商品の価格付け

二項モデルでは，**金融派生商品** (derivative) は満期時刻 T におけるペイオフを表す確率変数 X としてモデル化され，特に S_T の関数として $X = f(S_T)$ と書けるものが主要な興味の対象である．例えば $X = \max\{k - S_T, 0\}$ は行使価格 k のヨーロピアン・プット・オプションを表し，$X = \max\{S_T - k, 0\}$ は行使価格 k のヨーロピアン・コール・オプションを表す．本節の目標はこのような金融派生商品の価格を求めることである．

まず，金融派生商品の価格を定義するために投資戦略の概念を定義する．

定義 1.1 次の条件を満たす確率変数の列 $\theta = (\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_T, \beta_T)$ を**自己資金調達投資戦略** (self-financing strategy) と呼ぶ：

- 任意の $t = 1, \dots, T$ に対して α_t, β_t は $\mathcal{F}_{t-1}$ 可測.
- 任意の $t = 1, \dots, T-1$ に対して $\alpha_t(1+r)^t + \beta_t S_t = \alpha_{t+1}(1+r)^t + \beta_{t+1} S_t$ が成立する.

自己資金調達投資戦略 θ の時刻 t における**価値** (value) を

$$V_t(\theta) = \alpha_t(1+r)^t + \beta_t S_t = \alpha_{t+1}(1+r)^t + \beta_{t+1} S_t$$

で定義する．ただし，$t = 0$ のときは $V_0(\theta) = \alpha_1(1+r)^0 + \beta_0 S_0 = \alpha_1 + \beta_0 s_0$ と定義し，$t = T$ のときは $V_T(\theta) = \alpha_T(1+r)^T + \beta_T S_T$ と定義する.

注意 1.2 α_t, β_t はそれぞれ時刻 $t-1$ から t までの間の安全資産・株の保有量を表している. $V_t(\theta)$ は $\mathcal{F}_t$ 可測な確率変数である.

定義 1.3 確率変数 X に対して，$V_T(\theta) = X$ を満たす自己資金調達投資戦略 θ を X の**複製戦略** (replicating strategy) と呼ぶ．X の複製戦略 θ に対して，$V_t(\theta)$ を時刻 t における X の**価格** (price) と呼ぶ ($t = 0, \dots, T$).

注意 1.4 X の価格は株価が上昇する確率 p には依存しない.

ここでの価格の定義が well-defined であることは次の定理によって保証される：

定理 1.5 任意の確率変数 X に対して複製戦略はただ 1 つ存在する.

証明 複製戦略を $\theta = (\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_T, \beta_T)$ とおくと，可測性より $\alpha_t = \alpha_t(\omega_1, \dots, \omega_{t-1})$, $\beta_t = \beta_t(\omega_1, \dots, \omega_{t-1})$ と書ける．このとき θ が満たすべき条件は，

$$\begin{cases} \alpha_T(\omega_1, \dots, \omega_{T-1})(1+r)^T + \beta_T(\omega_1, \dots, \omega_{T-1}) S_{T-1}(\omega_1, \dots, \omega_{T-1}) u = X(\omega_1, \dots, \omega_{T-1}, 1), \\ \alpha_T(\omega_1, \dots, \omega_{T-1})(1+r)^T + \beta_T(\omega_1, \dots, \omega_{T-1}) S_{T-1}(\omega_1, \dots, \omega_{T-1}) d = X(\omega_1, \dots, \omega_{T-1}, -1) \end{cases}$$

かつ $t = 1, \dots, T$ に対して

$$\begin{cases} \alpha_t(\omega_1, \dots, \omega_{t-1})(1+r)^t + \beta_t(\omega_1, \dots, \omega_{t-1}) S_{t-1}(\omega_1, \dots, \omega_{t-1}) u \\ \qquad = \alpha_{t+1}(\omega_1, \dots, \omega_{t-1}, 1)(1+r)^t + \beta_{t+1}(\omega_1, \dots, \omega_{t-1}, 1) S_{t-1}(\omega_1, \dots, \omega_{t-1}) u, \\ \alpha_t(\omega_1, \dots, \omega_{t-1})(1+r)^t + \beta_t(\omega_1, \dots, \omega_{t-1}) S_{t-1}(\omega_1, \dots, \omega_{t-1}) d \\ \qquad = \alpha_{t+1}(\omega_1, \dots, \omega_{t-1}, -1)(1+r)^t + \beta_{t+1}(\omega_1, \dots, \omega_{t-1}, -1) S_{t-1}(\omega_1, \dots, \omega_{t-1}) d \end{cases}$$

が成立することなので，帰納的に $\alpha_T, \beta_T, \dots, \alpha_1, \beta_1$ が一意的に定まる. ∎

リスク中立確率の概念を用いると，X の価格を簡単に計算することができる．

定義 1.6 $q \in (0,1)$ を方程式

$$qu + (1-q)d = 1 + r$$

の解すなわち $q = (1+r-d)/(u-d)$ とする．$(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度 Q であって，各 $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_T) \in \Omega$ に対して

$$Q(\{\omega\}) = q^{\#\{i=1,\ldots,T|\omega_i=1\}}(1-q)^{\#\{i=1,\ldots,T|\omega_i=-1\}}$$

を満たすものを**リスク中立確率** (risk-neutral probability) または**同値マルチンゲール測度** (equivalent martingale measure) と呼ぶ.

命題 1.7 θ を自己資本調達投資戦略とし，$0 \leqq s \leqq t \leqq T$ とすると，

$$V_s(\theta) = \frac{1}{(1+r)^{t-s}} E_Q[V_t(\theta)|\mathcal{F}_s]$$

すなわち任意の $\omega_1, \ldots, \omega_s = \pm 1$ に対して次が成立する：

$$V_s(\theta)(\omega_1, \ldots, \omega_s) = \frac{1}{(1+r)^{t-s}} \sum_{\omega_{s+1},\ldots,\omega_t=\pm 1} q^{\#\{i=s+1,\ldots,t|\omega_i=1\}}(1-q)^{\#\{i=s+1,\ldots,t|\omega_i=-1\}} V_t(\theta)(\omega_1, \ldots, \omega_t).$$

証明　s を固定して t についての帰納法で証明する．$t = s$ のとき右辺は

$$\frac{1}{(1+r)^0} q^0 (1-q)^0 V_s(\theta)(\omega_1, \ldots, \omega_s) = V_s(\theta)(\omega_1, \ldots, \omega_s)$$

となるのでよい．t のときに成立すると仮定する．任意の $\omega_{s+1}, \ldots, \omega_t = \pm 1$ に対して

$$\begin{aligned}
V_{t+1}(\theta)(\omega_1, \ldots, \omega_t, 1) &= \alpha_{t+1}(\omega_1, \ldots, \omega_t)(1+r)^{t+1} + \beta_{t+1}(\omega_1, \ldots, \omega_t) S_t(\omega_1, \ldots, \omega_t) u, \\
V_{t+1}(\theta)(\omega_1, \ldots, \omega_t, -1) &= \alpha_{t+1}(\omega_1, \ldots, \omega_t)(1+r)^{t+1} + \beta_{t+1}(\omega_1, \ldots, \omega_t) S_t(\omega_1, \ldots, \omega_t) d
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
&qV_{t+1}(\theta)(\omega_1, \ldots, \omega_t, 1) + (1-q)V_{t+1}(\theta)(\omega_1, \ldots, \omega_t, -1) \\
&\quad = \alpha_{t+1}(\omega_1, \ldots, \omega_t)(1+r)^{t+1} + \beta_{t+1}(\omega_1, \ldots, \omega_t) S_t(\omega_1, \ldots, \omega_t)\big(qu + (1-q)d\big) \\
&\quad = (1+r)\big(\alpha_{t+1}(\omega_1, \ldots, \omega_t)(1+r)^t + \beta_{t+1}(\omega_1, \ldots, \omega_t) S_t(\omega_1, \ldots, \omega_t)\big) \\
&\quad = (1+r)V_t(\theta)
\end{aligned}$$

が成立する．よって，$t+1$ のときの命題の式の右辺は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(1+r)^{t+1-s}} \sum_{\omega_{s+1},\ldots,\omega_{t+1}=\pm 1} q^{\#\{i=s+1,\ldots,t+1|\omega_i=1\}}(1-q)^{\#\{i=s+1,\ldots,t+1|\omega_i=-1\}} V_{t+1}(\theta)(\omega_1,\ldots,\omega_{t+1}) \\
&= \frac{1}{(1+r)^{t+1-s}} \sum_{\omega_{s+1},\ldots,\omega_t=\pm 1} \Big(q^{\#\{i=s+1,\ldots,t|\omega_i=1\}+1}(1-q)^{\#\{i=s+1,\ldots,t|\omega_i=-1\}} V_{t+1}(\theta)(\omega_1,\ldots,\omega_t,1) \\
&\qquad\qquad + q^{\#\{i=s+1,\ldots,t|\omega_i=1\}}(1-q)^{\#\{i=s+1,\ldots,t|\omega_i=-1\}+1} V_{t+1}(\theta)(\omega_1,\ldots,\omega_t,-1) \Big) \\
&= \frac{1}{(1+r)^{t+1-s}} \sum_{\omega_{s+1},\ldots,\omega_t=\pm 1} \Big(q^{\#\{i=s+1,\ldots,t|\omega_i=1\}}(1-q)^{\#\{i=s+1,\ldots,t|\omega_i=-1\}} \\
&\qquad\qquad \times \big(qV_{t+1}(\theta)(\omega_1,\ldots,\omega_t,1) + (1-q)V_{t+1}(\theta)(\omega_1,\ldots,\omega_t,-1) \big) \Big) \\
&= \frac{1}{(1+r)^{t-s}} \sum_{\omega_{s+1},\ldots,\omega_t=\pm 1} q^{\#\{i=s+1,\ldots,t|\omega_i=1\}}(1-q)^{\#\{i=s+1,\ldots,t|\omega_i=-1\}} V_t(\theta) \\
&= V_s(\theta)(\omega_1,\ldots,\omega_s)
\end{aligned}
$$

となり確かに $t+1$ のときも成立することが分かる． ∎

注意 1.8 命題 1.7 は確率測度 Q に関して $\big(V_t(\theta)/(1+r)^t\big)_{t=0,\ldots,T}$ がマルチンゲールであることを示している．これが Q が同値マルチンゲール測度と呼ばれる由来である．

定理 1.9 確率変数 X の時刻 0 における価格は次で与えられる：

$$\frac{1}{(1+r)^T} E_Q[X] = \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_T)\in\Omega} q^{\#\{i=1,\ldots,T|\omega_i=1\}}(1-q)^{\#\{i=1,\ldots,T|\omega_i=-1\}} X(\omega).$$

特に $X=f(S_T)$ の形で表される場合は次で与えられる：

$$\frac{1}{(1+r)^T} \sum_{k=0}^{T} \binom{T}{k} q^k (1-q)^{T-k} f(s_0 u^k d^{T-k}).$$

証明 命題 1.7 で $s=0,\ t=T$ とすればよい． ∎

1.3 例

$T=2,\ r=0.5,\ u=2,\ d=1/3,\ s_0=450$ とする（p は不要なので特に指定しない）と，株価の変化は次のように表される：

$$
\begin{tikzcd}
 & & S_2=1800 \\
 & S_1=900 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0=450 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2=300 \\
 & S_1=150 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2=50
\end{tikzcd}
$$

このとき，満期時刻 2，行使価格 375 のヨーロピアン・プット・オプションの時刻 0 における価格を求める．このオプションの満期でのペイオフは次で与えられる：

$$X = \max\{375 - S_2, 0\} = \begin{cases} 0 & (S_2 = 1800), \\ 75 & (S_2 = 300), \\ 325 & (S_2 = 50). \end{cases}$$

定理 1.5 の証明に従って X の複製戦略 $\theta = (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ を求めよう．まず α_2, β_2 は

$$\begin{cases} 1.5^2\alpha_2(1) + 1800\beta_2(1) = 0, \\ 1.5^2\alpha_2(1) + 300\beta_2(1) = 75, \end{cases} \qquad \begin{cases} 1.5^2\alpha_2(-1) + 300\beta_2(-1) = 75, \\ 1.5^2\alpha_2(-1) + 50\beta_2(-1) = 325 \end{cases}$$

から $\alpha_2(1) = 40$, $\beta_2(1) = -1/20$, $\alpha_2(-1) = 500/3$, $\beta_2(-1) = -1$ と求められる．次に α_1, β_1 は

$$\begin{cases} 1.5\alpha_1 + 900\beta_1 = 1.5\alpha_2(1) + 900\beta_2(1) = 1.5 \cdot 40 + 900 \cdot (-1/20) = 15, \\ 1.5\alpha_1 + 150\beta_1 = 1.5\alpha_2(-1) + 150\beta_2(-1) = 1.5 \cdot 500/3 + 150 \cdot (-1) = 100 \end{cases}$$

から $\alpha_1 = 78$, $\beta_1 = -17/150$ と求められる．よって時刻 0 における X の価格は

$$V_0(\theta) = \alpha_1 + 450\beta_1 = 78 + 450 \cdot (-17/150) = 27$$

である．

一方，リスク中立確率を求めると

$$2q + \frac{1}{3}(1-q) = 1.5$$

より $q = 0.7$ となるので，定理 1.9 より時刻 0 における X の価格は

$$\frac{1}{1.5^2}\left(\binom{2}{0} \cdot 0.7^2 \cdot 0 + \binom{2}{1} \cdot 0.7 \cdot 0.3 \cdot 75 + \binom{2}{2} \cdot 0.3^2 \cdot 325\right) = 27$$

となり，上で求めたものと一致する．

2　Markov 過程による生存・死亡状況の記述

$(X_x)_{x \geq 0}$ を連続時間 Markov 過程とする．状態空間は各小節で定められる有限集合であり，X_x は人の x 歳における状態（生存・死亡など）を表す．

2.1　生存・死亡

状態空間を $\{a, d\}$ とし（a は生存 (alive) を表し，d は死亡 (dead) を表す），推移は次の方向にのみ起こりうると仮定する：

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{生存 } a} \arrow[d] \\ \boxed{\text{死亡 } d} \end{tikzcd}$$

$x, t \geqq 0$ に対して推移確率を

$$ {}_tp_x = P(X_{x+t} = a \mid X_x = a), \qquad {}_tq_x = P(X_{x+t} = d \mid X_x = a) $$

と書き，これらが微分方程式

$$ \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} {}_tp_x & {}_tq_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_tp_x & {}_tq_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\mu_{x+t} & \mu_{x+t} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} $$

を満たすと仮定する．μ_x を年齢 x における**死力** (force of mortality) と呼ぶ.

命題 2.1 任意の $x, t \geqq 0$ に対して次が成立する：

$$ {}_tp_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}\, ds\right), \qquad {}_tq_x = 1 - {}_tp_x. $$

証明 微分方程式と ${}_0p_x = 1$, ${}_0q_x = 0$ から容易に従う． ∎

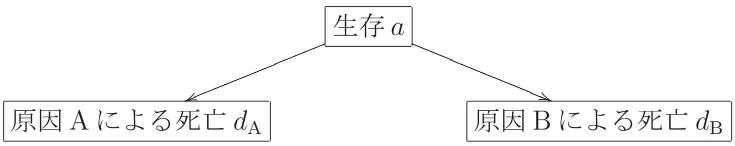
例 2.2 $\mu_{x+t} = \mu_x/(1-\mu_x t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ の場合，$0 \leqq t \leqq 1$ に対して

$$ {}_tp_x = \exp\left(-\int_0^t \frac{\mu_x}{1-\mu_x s}\, ds\right) = 1 - \mu_x t, \qquad {}_tq_x = 1 - {}_tp_x = \mu_x t $$

となる．これは $0 \leqq t \leqq 1$ において一様に死亡が発生する状況を表しており，このとき $\mu_x = {}_1q_x$ が成立する.

2.2 多重脱退

状態空間を $\{a, d_{\mathrm{A}}, d_{\mathrm{B}}\}$ とし（d_{A}, d_{B} はそれぞれ原因 A, B による死亡を表す），推移は次の方向にのみ起こりうると仮定する：



$x, t \geqq 0$ に対して推移確率を

$$ {}_tp_x = P(X_{x+t} = a \mid X_x = a), \quad {}_tq_x^{\mathrm{A}} = P(X_{x+t} = d_{\mathrm{A}} \mid X_x = a), \quad {}_tq_x^{\mathrm{B}} = P(X_{x+t} = d_{\mathrm{B}} \mid X_x = a) $$

と書き，これらが微分方程式

$$ \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} {}_tp_x & {}_tq_x^{\mathrm{A}} & {}_tq_x^{\mathrm{B}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_tp_x & {}_tq_x^{\mathrm{A}} & {}_tq_x^{\mathrm{B}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\mu_{x+t}^{\mathrm{A}} - \mu_{x+t}^{\mathrm{B}} & \mu_{x+t}^{\mathrm{A}} & \mu_{x+t}^{\mathrm{B}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} $$

を満たすと仮定する.

命題 2.3 任意の $x, t \geqq 0$ に対して次が成立する：

$$ {}_tp_x = \exp\left(-\int_0^t (\mu^{\mathrm{A}}_{x+s} + \mu^{\mathrm{B}}_{x+s})\,ds\right), \quad {}_tq^{\mathrm{A}}_x = \int_0^t {}_sp_x\mu^{\mathrm{A}}_{x+s}\,ds, \quad {}_tq^{\mathrm{B}}_x = \int_0^t {}_sp_x\mu^{\mathrm{B}}_{x+s}\,ds. $$

証明 容易である． ∎

A, B の片方の原因が存在しない場合の死亡率を**絶対死亡率** (absolute probability of death) と呼び,

$$ {}_tq^{\mathrm{A}*}_x = 1 - \exp\left(-\int_0^t \mu^{\mathrm{A}}_{x+s}\,ds\right), \qquad {}_tq^{\mathrm{B}*}_x = 1 - \exp\left(-\int_0^t \mu^{\mathrm{B}}_{x+s}\,ds\right) $$

で定義される．死亡が一様に発生するという仮定の下で，死亡率は絶対死亡率から次のようにして簡単に求めることができる：

命題 2.4 $0 \leqq t \leqq 1$ に対して $\mu^{\mathrm{A}}_{x+t} = \mu^{\mathrm{A}}_x/(1-\mu^{\mathrm{A}}_x t)$, $\mu^{\mathrm{B}}_{x+t} = \mu^{\mathrm{A}}_x/(1-\mu^{\mathrm{B}}_x t)$ が成立すると仮定すると，次が成立する：

$$ q^{\mathrm{A}}_x = q^{\mathrm{A}*}_x\left(1 - \frac{q^{\mathrm{B}*}_x}{2}\right), \qquad q^{\mathrm{B}}_x = q^{\mathrm{B}*}_x\left(1 - \frac{q^{\mathrm{A}*}_x}{2}\right). $$

ただし q^{A}_x などは ${}_1q^{\mathrm{A}}_x$ などの略記である．

証明 どちらも同様なので q^{A}_x についてのみ証明する．$0 \leqq t \leqq 1$ に対して

$$ {}_tp_x = \exp\left(-\int_0^t \left(\frac{\mu^{\mathrm{A}}_x}{1-\mu^{\mathrm{A}}_x s} + \frac{\mu^{\mathrm{B}}_x}{1-\mu^{\mathrm{B}}_x s}\right)ds\right) = (1-\mu^{\mathrm{A}}_x t)(1-\mu^{\mathrm{B}}_x t) $$

なので

$$ q^{\mathrm{A}}_x = \int_0^1 (1-\mu^{\mathrm{A}}_x s)(1-\mu^{\mathrm{B}}_x s)\frac{\mu^{\mathrm{A}}_x}{1-\mu^{\mathrm{A}}_x s}\,ds = \mu^{\mathrm{A}}_x\left(1 - \frac{\mu^{\mathrm{B}}_x}{2}\right) $$

となり，例 2.2 より $\mu^{\mathrm{A}}_x = q^{\mathrm{A}*}_x$, $\mu^{\mathrm{B}}_x = q^{\mathrm{B}*}_x$ なので命題が従う． ∎

2.3 死亡・就業不能

状態空間を $\{a, i, d\}$ とし（i は就業不能 (invalid) を表す)，推移は次の方向にのみ起こりうると仮定する：

$$ \begin{tikzcd} & \boxed{\text{生存 } a} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \boxed{\text{就業不能 } i} \arrow[rr] & & \boxed{\text{死亡 } d} \end{tikzcd} $$

$x, t \geqq 0$ に対して推移確率を

$$ {}_tp^{aa}_x = P(X_{x+t} = a \mid X_x = a), \quad {}_tp^{ai}_x = P(X_{x+t} = i \mid X_x = a), \quad {}_tq^{a}_x = P(X_{x+t} = d \mid X_x = a), $$
$$ {}_tp^{i}_x = P(X_{x+t} = i \mid X_x = i), \quad {}_tq^{i}_x = P(X_{x+t} = d \mid X_x = i) $$

と書き，これらが微分方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} {}_tp_x^{aa} & {}_tp_x^{ai} & {}_tq_x^{a} \\ 0 & {}_tp_x^{i} & {}_tq_x^{i} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_tp_x^{aa} & {}_tp_x^{ai} & {}_tq_x^{a} \\ 0 & {}_tp_x^{i} & {}_tq_x^{i} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\mu_{x+t}^{ai}-\mu_{x+t}^{a} & \mu_{x+t}^{ai} & \mu_{x+t}^{a} \\ 0 & -\mu_{x+t}^{i} & \mu_{x+t}^{i} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を満たすと仮定する．

命題 2.5 任意の $x, t \geqq 0$ に対して次が成立する：

$${}_tp_x^{aa} = \exp\left(-\int_0^t (\mu_{x+s}^{ai}+\mu_{x+s}^{a})\,ds\right), \qquad {}_tp_x^{i} = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}^{i}\,ds\right),$$

$${}_tp_x^{ai} = \int_0^t {}_sp_x^{aa}\mu_{x+s}^{ai}\,{}_{t-s}p_{x+s}^{i}\,ds, \qquad {}_tq_x^{a} = 1-{}_tp_x^{aa}-{}_tp_x^{ai}, \qquad {}_tq_x^{i} = 1-{}_tp_x^{i}.$$

証明　まず，

$$\frac{d}{dt}{}_tp_x^{aa} = -{}_tp_x^{aa}(\mu_{x+t}^{ai}+\mu_{x+t}^{a}), \qquad \frac{d}{dt}{}_tp_x^{i} = -{}_tp_x^{i}\mu_{x+t}^{i}$$

と ${}_0p_x^{aa} = {}_0p_x^{i} = 1$ より ${}_tp_x^{aa}$, ${}_tp_x^{i}$ が求められる．次に

$$\frac{d}{dt}{}_tp_x^{ai} = {}_tp_x^{aa}\mu_{x+t}^{ai} - {}_tp_x^{ai}\mu_{x+t}^{i}$$

より

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{{}_tp_x^{ai}}{{}_tp_x^{i}}\right) = \frac{({}_tp_x^{aa}\mu_{x+t}^{ai}-{}_tp_x^{ai}\mu_{x+t}^{i}){}_tp_x^{i} - {}_tp_x^{ai}(-{}_tp_x^{i}\mu_{x+t}^{i})}{({}_tp_x^{i})^2} = \frac{{}_tp_x^{aa}\mu_{x+t}^{ai}}{{}_tp_x^{i}}$$

なので ${}_tp_x^{ai} = {}_tp_x^{i}\int_0^t ({}_sp_x^{aa}\mu_{x+s}^{ai}/{}_sp_x^{i})\,ds$ であるが，$0 \leqq s \leqq t$ のとき

$$\begin{aligned} {}_tp_x^{i} &= P(X_{x+t}=i \mid X_x=i) = P(X_{x+t}=i,\ X_{x+s}=i \mid X_x=i) \\ &= P(X_{x+t}=i \mid X_{x+s}=i,\ X_x=i)P(X_{x+s}=i \mid X_x=i) \\ &= P(X_{x+t}=i \mid X_{x+s}=i)P(X_{x+s}=i \mid X_x=i) = {}_{t-s}p_{x+s}^{i}\,{}_sp_x^{i} \end{aligned}$$

なので ${}_tp_x^{ai} = \int_0^t {}_sp_x^{aa}\mu_{x+s}^{ai}\,{}_{t-s}p_{x+s}^{i}\,ds$ が得られる．${}_tq_x^{a}$, ${}_tq_x^{i}$ の式は明らかである．∎

参考文献

[1] Ragnar Norberg, *Basic Life Insurance Mathematics*, `http://www.math.ku.dk/~mogens/lifebook.pdf`, 2002.

[2] 京都大学理学部アクチュアリーサイエンス部門編『確率で考える生命保険数学入門』岩波書店，2012.

[3] 黒田耕嗣，松山直樹『生命保険数理への確率論的アプローチ』培風館，2010.

[4] 藤田岳彦『ファイナンスの確率解析入門』講談社，2002.

[5] 二見隆『生命保険数学』生命保険文化研究所，1992.

[6] 若山正人編，川崎英文・谷口説男著『最適化法，数理ファイナンスへの確率解析入門』講談社サイエンティフィク（現代技術への数学入門シリーズ），2008.