

# 正規コピュラの漸近的裾依存性

齋藤新悟（九州大学大学院数理学研究院）

## 概要

確率変数間の依存関係をコピュラを用いて考察する場合、確率変数の裾の依存関係はある極限值で表現される。正規コピュラは、この極限值が独立な場合と同じなので裾の依存性を表現できないとみなされることがある。しかし、応用上は極限值よりも漸近挙動の方が重要であると考えられ、正規コピュラの漸近挙動は独立な場合とは異なることが分かったため、そのことについて報告する。

## 1 はじめに

当研究成果は、講演者が日新火災海上保険株式会社と九州大学大学院数理学研究院との共同研究に携わる中で近藤宏樹氏（日新火災海上保険株式会社）、谷口説男氏（九州大学大学院数理学研究院）と共同で得たものである。

保険会社が抱えるリスクは多岐にわたり、すべての定量的評価を一挙に与えるのは困難である。そのため、リスクをいくつかに分類して、それぞれを確率変数を用いてモデル化して評価した後、それらを統合するという段階を踏むのが一般的である。簡単のためにリスクを2種類に分けたとすると、リスク統合の問題は確率変数  $X, Y$  の分布が既知の場合に  $X + Y$  の分布を求める問題として定式化できる。このとき、 $X + Y$  の分布を求めるには  $X, Y$  の分布だけでは不十分で、それらの依存関係を知る必要がある。

確率変数  $X, Y$  の間の依存関係を示す指標としては、相関係数

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

( $\text{Cov}(X, Y)$  は  $X, Y$  の共分散、 $\sigma(X), \sigma(Y)$  はそれぞれ  $X, Y$  の標準偏差) が代表的である。しかし、相関係数は確率変数間の依存関係を完全に表したのではなく、例えばリスク評価の際に用いられることが多い VaR (Value at Risk, パーセント点) を  $X + Y$  について求める際には相関係数では不十分である。

このような問題点を克服する依存関係の指標としてコピュラがある。  $X, Y$  それぞれの分布とその依存関係を表すコピュラが分かれば、  $X + Y$  の分布は完全に決定するので (原理的には) VaR も求めることができる。

コピュラには様々な種類のものがあり、多変量正規分布に由来する正規コピュラは最も扱いやすいものの1つである。しかし、正規コピュラは裾の依存性を表すある極限值が独立な場合と同じなので、裾の依存性を表現できないとみなされることがある。本講演では漸近挙動を考慮して、正規コピュラの裾の依存性について再検討を行う。

## 2 確率変数と分布関数

確率変数  $X$  に対して,  $F_X(x) = P(X \leq x)$  で定まる関数  $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  を  $X$  の分布関数と呼ぶ.  $F_X$  が連続のとき,  $X$  は連続型であるという.

**命題 2.1**  $X$  が連続型確率変数ならば, 確率変数  $Y = F_X(X)$  は  $[0, 1]$  上の一様分布に従う.

**【証明】**  $0 < y < 1$  とする.  $x_0 = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \leq y\} \in \mathbb{R}$  とおくと,  $x \leq x_0$  と  $F_X(x) \leq y$  は同値であり,  $F_X$  の連続性より  $F_X(x_0) = y$  が成立するので,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(F_X(X) \leq y) = P(X \leq x_0) = F_X(x_0) = y$$

となる. よって  $Y$  は  $[0, 1]$  上の一様分布に従う. ■

2次元確率変数  $(X, Y)$  に対して,  $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$  で定まる関数  $F_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$  を  $(X, Y)$  の同時分布関数と呼び,  $F_X, F_Y$  を周辺分布関数と呼ぶ.  $F_X, F_Y$  がともに連続のとき,  $(X, Y)$  は連続型であるという.

確率変数  $X, Y$  が独立であるとは, 任意の  $x, y \in \mathbb{R}$  に対して

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

すなわち

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$$

が成立することをいう.

## 3 コピュラ

**定義 3.1** 次の条件を満たす  $C: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  をコピュラと呼ぶ: ある2次元確率変数  $(U, V)$  が存在して, 周辺分布はともに  $[0, 1]$  上の一様分布であり, 同時分布関数は  $C$  に一致するようなものをいう. すなわち, 任意の  $u, v \in [0, 1]$  に対して次が成立する:

$$F_U(u) = u, \quad F_V(v) = v, \quad F_{U,V}(u, v) = C(u, v).$$

**例 3.2**  $U, V$  を  $[0, 1]$  上の一様分布に従う独立な確率変数とすると

$$F_{U,V}(u, v) = F_U(u)F_V(v) = uv$$

となるので,  $\Pi(u, v) = uv$  はコピュラである. このコピュラを積コピュラと呼ぶ.

確率変数の依存関係を表す際にコピュラが有効であることを示すのが次の定理である:

**定理 3.3 (Sklar の定理)**

- (1)  $(X, Y)$  を連続型 2次元確率変数とする．このとき，コピュラ  $C_{X,Y}$  が一意的に存在して，任意の  $x, y \in \mathbb{R}$  に対して次が成立する：

$$F_{X,Y}(x, y) = C_{X,Y}(F_X(x), F_Y(y)).$$

- (2)  $F_1, F_2$  を連続な分布関数とし， $C$  をコピュラとする．このとき，連続型 2次元確率変数  $(X, Y)$  が存在して， $F_X = F_1, F_Y = F_2, C_{X,Y} = C$  が成立する．

Sklar の定理の (1) はコピュラと周辺分布によって同時分布が復元できることを示しており，(2) はコピュラと周辺分布を別個に選ぶことができることを示している．

**定義 3.4**  $-1 < \rho < 1$  とする．平均  $(0, 0)$ ，分散共分散行列  $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$  の 2 変量正規分布に従う 2次元確率変数  $(X, Y)$  に対して， $C_{X,Y}$  を相関  $\rho$  の正規コピュラまたはガウス型コピュラと呼び，ここでは  $C_\rho$  と書く．

## 4 裾依存性とコピュラ

### 4.1 コピュラの裾依存性

$(X, Y)$  を連続型 2次元確率変数とする．

**定義 4.1**  $(X, Y)$  の  $t \in (0, 1)$  での裾依存度  $\lambda_{X,Y}(t)$  および裾依存係数  $\lambda_{X,Y}$  を次で定義する：

$$\lambda_{X,Y}(t) = P(F_Y(Y) > t \mid F_X(X) > t) = \frac{P(F_X(X) > t, F_Y(Y) > t)}{P(F_X(X) > t)},$$

$$\lambda_{X,Y} = \lim_{t \nearrow 1} \lambda_{X,Y}(t).$$

**命題 4.2** 任意の  $t \in (0, 1)$  に対して，次が成立する：

$$\lambda_{X,Y}(t) = \frac{1 - 2t + C_{X,Y}(t, t)}{1 - t}.$$

**【証明】**  $F_X(X), F_Y(Y)$  は  $[0, 1]$  上の一様分布に従うので，

$$\begin{aligned} \lambda_{X,Y}(t) &= \frac{P(F_X(X) > t, F_Y(Y) > t)}{P(F_X(X) > t)} \\ &= \frac{1 - P(F_X(X) \leq t) - P(F_Y(Y) \leq t) + P(F_X(X) \leq t, F_Y(Y) \leq t)}{1 - P(F_X(X) \leq t)} \\ &= \frac{1 - 2t + C_{X,Y}(t, t)}{1 - t} \end{aligned}$$

となり，命題が従う。 ■

上の命題より  $\lambda_{X,Y}(t), \lambda_{X,Y}$  は  $C_{X,Y}$  のみによって定まるので， $C_{X,Y} = C$  のとき  $\lambda_{X,Y}(t), \lambda_{X,Y}$  をそれぞれ  $\lambda_C(t), \lambda_C$  と書く．

**例 4.3** 積コピュラ  $\Pi(u, v) = uv$  に対して， $\lambda_\Pi(t) = 1 - t, \lambda_\Pi = 0$  である．

## 4.2 正規コピュラの裾依存性

例 4.3 で見たように、独立性を表す積コピュラの裾依存係数は  $\lambda_{\Pi} = 0$  である。一方、正規コピュラについても  $\lambda_{C_{\rho}} = 0$  となることが知られており、このことから正規コピュラは裾での相関を持たないとみなされることがある。しかし、1 に近い  $t$  で  $\lambda_{\Pi}(t)$ ,  $\lambda_{C_{\rho}}(t)$  の値を具体的に計算してみると次の表のようになり、これらが 0 に近づく速さには違いがあることが観察される：

	積コピュラ $\Pi$	正規コピュラ $C_{\rho}$ ( $\rho = 0.5$ )
$t = 0.8$	0.2000	0.4358
$t = 0.9$	0.1000	0.3240
$t = 0.95$	0.0500	0.2438
$t = 0.99$	0.0100	0.1294
$t = 0.995$	0.0050	0.0993
$t = 0.999$	0.0010	0.0543

この講演の主定理は、 $\lambda_{C_{\rho}}(t)$  の  $t \nearrow 1$  での漸近的な振る舞いを与える次の定理である：

**定理 4.4** 正規コピュラ  $C_{\rho}$  ( $-1 < \rho < 1$ ) に対して、次が成立する：

$$\begin{aligned} \lambda_{C_{\rho}}(t) &= \sqrt{\frac{(1+\rho)^3}{2\pi(1-\rho)}} \exp\left(-\frac{1-\rho}{2(1+\rho)}s^2\right) \left(s^{-1} - \frac{1+2\rho-\rho^2}{1-\rho}s^{-3} + O(s^{-5})\right) \\ &\sim (4\pi)^{-\frac{\rho}{1+\rho}} \sqrt{\frac{(1+\rho)^3}{1-\rho}} (1-t)^{\frac{1-\rho}{1+\rho}} (-\log(1-t))^{-\frac{\rho}{1+\rho}} \quad (t \nearrow 1). \end{aligned}$$

ただし  $s$  は  $\Phi(s) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^s \exp(-x^2/2) dx = t$  で定められ ( $\Phi$  は標準正規分布の分布関数),  $t \nearrow 1$  のとき  $s \nearrow \infty$  である。

この定理より  $\lambda_{C_{\rho}}(t)$  はおよそ  $(1-t)^{(1-\rho)/(1+\rho)}$  のオーダーで 0 に収束することが分かり、 $\rho = 0$  のときを除き  $\lambda_{\Pi}(t) = 1-t$  とは収束のオーダーが異なる。なお、ここでは簡単のため  $s^{-3}$  の項までの係数を記述したが、より高次の項の係数を求めることも可能である。