灘中学校土曜講座アブストラクト

東京大学理学部数学科 4 年生
灘高等学校 52 回生
斎藤新悟

1　概略

Koch 曲線や Sierpinski の三角形を見たことのある人はそれなりにいるだろう。また，それぞれの次元が $\log_3 4, \log_2 3$ である*ことまで知っている人も中にはいるかもしれない。しかし，次元の定義を用いた，このことの厳密な証明を見た経験がある人はほとんどいないだろう。

フラクタルは，単に図形を眺めるだけでも十分その美しさが味わえるものであるが，その背景にある数学理論もそれに匹敵する美しさをもっている。残念ながら，1 時間 30 分という時間の中で，灘中生が知っているであろうことだけを前提として厳密な証明を行うのは不可能である。講座内で，いくつかの参考文献を挙げるので，余力のある人はそれらを参考に学習を進めてほしい。

2　アトラクタ

ここでは，具体的なフラクタルの例を構成する。ここで紹介するのは次の定理である：

定理

$\phi_1, \ldots, \phi_m$ を平面上の縮小相似変換とし，縮小率をそれぞれ $c_1, \ldots, c_m$ とおく。すなわち，$j = 1, \ldots, m$ に対して，$0 \leqq c_j < 1$ であり，平面上の 2 点 P, Q に対して $\phi_j(\mathrm{P}), \phi_j(\mathrm{Q})$ の間の距離は P, Q の間の距離の c_j 倍になっているとする。

このとき，

$$\phi_1(K_0) \cup \cdots \cup \phi_m(K_0) = K_0$$

を満たす空でない有界閉集合 K_0 がただ 1 つ存在する。さらに，任意の有界閉集合 K に対して，$K \longmapsto \phi_1(K) \cup \cdots \cup \phi_m(K)$ という変換を繰り返し施すと K_0 に近づく。

このような K を $\phi_1, \ldots, \phi_m$ の**アトラクタ**という。

*これは高校で学ぶことなので知っている人もいるだろうが，1 でない正の数 a と正の数 b に対して，$a^x = b$ を満たす x を $\log_a b$ と書く。

3　次元

フラクタルという言葉の提唱者である Mandelbrot は，フラクタルとは，Hausdorff 次元が位相次元よりも真に大きい集合のことであると定義した。このように，フラクタルを考える際に，次元は非常に重要な概念である。

この講座では，Hausdorff 次元に似た次元で，より定義が簡単な**箱次元**（Minkowski 次元）について考察する。n を自然数とし，平面全体を 1 辺の長さが $\frac{1}{n}$ のマス目に分けたとき，考えている集合と交わるようなマス目の数を $N(n)$ とする。このとき，n が非常に大きいときの $\log_n N(n)$ の値を箱次元という。すなわち，箱次元が d であるような集合は，十分大きな n に対して

$$N(2n) \fallingdotseq (2n)^d = 2^d n^d \fallingdotseq 2^d N(n)$$

を満たす。

アトラクタの次元に関しては，Hutchinson による次の定理が基本的である：

定理（Hutchinson，1981）

平面上の縮小相似変換 $\phi_1, \ldots, \phi_m$ の縮小率を $c_1, \ldots, c_m$ とおく。$\phi_1, \ldots, \phi_m$ が「開集合条件」を満たすならば，$\phi_1, \ldots, \phi_m$ のアトラクタ K の箱次元，Hausdorff 次元はともに，$\displaystyle\sum_{j=1}^{m} c_j^s = 1$ を満たす正の数 s に一致する。